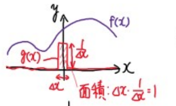
2020/7/17 T. Hirano

ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$
(連続と離散のかけ橋)



↓

$\delta(x)$ と定義

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} f(x) dx$$

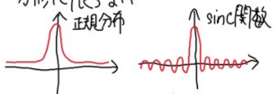
$\Delta x \to 0$ のとき $f(0)$

$$= f(0) \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{1}{\Delta x} \underbrace{\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx}_{= \Delta x}}_{=1}$$

$$= f(0)$$

- $\delta(x)$ を $f(x)$ にかけて積分すると、δ 関数の引数が 0 になるときの x での値 $f(0)$ が抜き出される (サンプリング)
- δ 関数は値は ∞ だが積分したら有限
→ 電荷密度は ∞ でも総電荷量は有限を表現できる

・そもそも、この性質を満たす形は方形に限らない

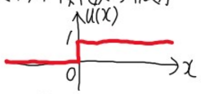


⇒ 次を δ 関数の定義とする

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \\ \delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \end{cases} \rightarrow \delta(0) = \infty$$

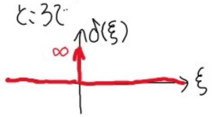
超関数

ステップ関数の微分



$$u(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geqq 0) \end{cases}$$

ところで



$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geqq 0) \end{cases} = u(x)$$

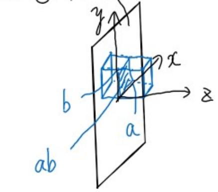
$$\frac{du(x)}{dx} = \delta(x)$$

⇒ 不連続の微分ができる!

$\boxed{\text{デルタ関数を用いた線・面電荷の体積積分}}$

面電荷: σ [C/m²]

z 方向で、厚さ → 0 となっているので
密度は z 方向では ∞。でも、電荷の総量は有限
⇒ δ 関数で表現するとよい



$$\underset{[C/m^3]}{\rho} = \sigma \delta(z)$$

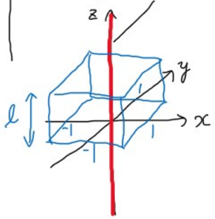
体積積分の計算ができる。
→ δ 関数のおかげ

$$\iiint_V \rho dv = \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} \int_{z=-1}^{1} \sigma \delta(z) dx dy dz$$

$$= \sigma \int_{x=0}^{a} dx \int_{y=0}^{b} dy \underbrace{\int_{z=-1}^{1} \delta(z) dz}_{= \int_{z=-\infty}^{\infty} \delta(z) dz = 1}$$

$$= \sigma ab \ [C]$$

線電荷: λ [C/m]



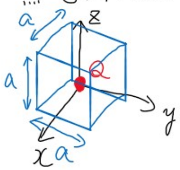
$$\underset{[C/m^3]}{\rho} = \lambda \delta(x) \delta(y)$$

$$\iiint_V \rho dv = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} \int_{z=0}^{l} \lambda \delta(x) \delta(y) dx dy dz$$

$$= \lambda \underbrace{\int_{x=-1}^{1} \delta(x) dx}_{=1} \underbrace{\int_{y=-1}^{1} \delta(y) dy}_{=1} \underbrace{\int_{z=0}^{l} dz}_{=l}$$

$$= \lambda l \ [C]$$

点電荷: Q [C]



$$\underset{[C/m^3]}{\rho} = Q \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

$$\iiint_V \rho dv = \int_{x=-a/2}^{a/2} \int_{y=-a/2}^{a/2} \int_{z=-a/2}^{a/2} Q \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz$$

$$= Q \underbrace{\int_{x=-a/2}^{a} \delta(x) dx}_{=1} \underbrace{\int_{y=-a/2}^{a/2} \delta(y) dy}_{=1} \underbrace{\int_{z=-a/2}^{a/2} \delta(z) dz}_{=1}$$

∞にしても同じ

$$= Q \ [C]$$