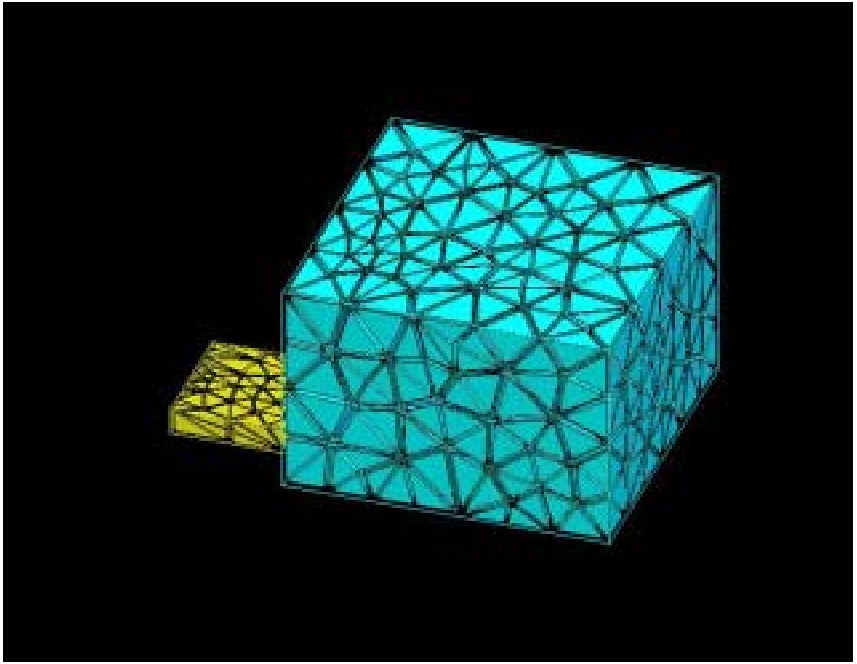
有限要素法
Finite Element Method (FEM)



Ando & Hirokawa lab.

Takuichi Hirano (RA)

History

ボーイング

1955-1956　**航空**

M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and J. L. Topp,
“Stiffness and deflection analysis of complex structures”,
Journal of Aeronautical Sciences, vol. 23, pp. 805-824, 1956

土木・建築・流体

1980　**電気**

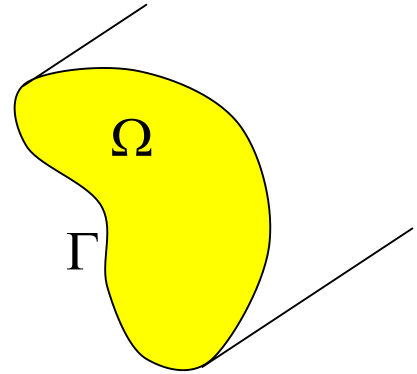
M. V. K. Chari and P. P. Silvester,
“Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems”,
John Wiley & Sons, 1980

写真提供: http://www.boeing.com/

Functional and Variational Principle

微分方程式(Differential Eq.)を解く

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)-\beta^2 p\phi+k_0{}^2 q\phi=0 \quad (1) \qquad \rightarrow \quad \phi$$



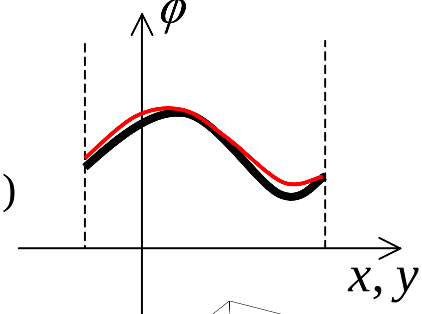
Equivalent [1]

数値計算 [2]

1. **放物型(陽解法**, Crank-Nicolson**法)**
2. **双曲型(差分法)**
3. **楕円型(差分近似, 反復法**[Jacobi**法**, Gauss-Seidel**法**, **逐次加速緩和法**, ADI**法**]

汎関数(Functional)の停留点を求める

$$F(\phi)=\iint_\Omega \frac{1}{2}\left[p\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+p\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\beta^2 p\phi^2-k_0{}^2 q\phi^2\right]dxdy-\int_{\Gamma_v}\left(v\phi-\frac{w}{2}\phi^2\right)d\Gamma \qquad (2)$$



変分原理

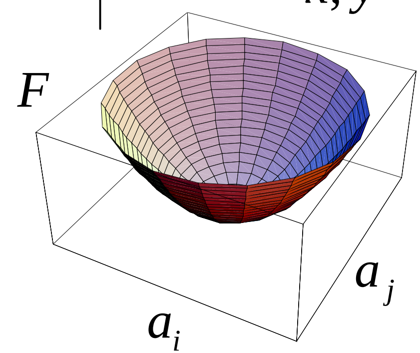
ϕ **を少し変化させて** $\delta F=0$ **となる** ϕ : (1)**の解**

$$\phi(x,y)=\sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n(x,y) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}=0 \quad (i=1,\cdots,N)$$

固有値問題

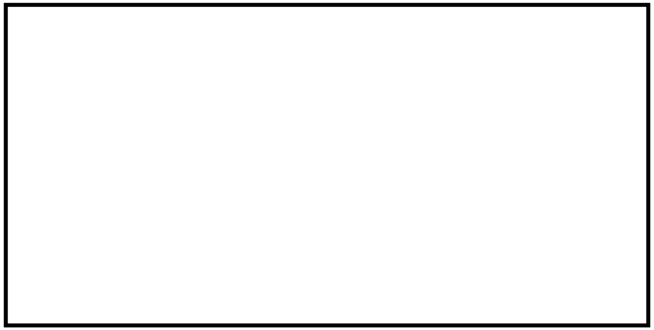
波源あり → 連立一次方程式
波源なし → 固有値問題

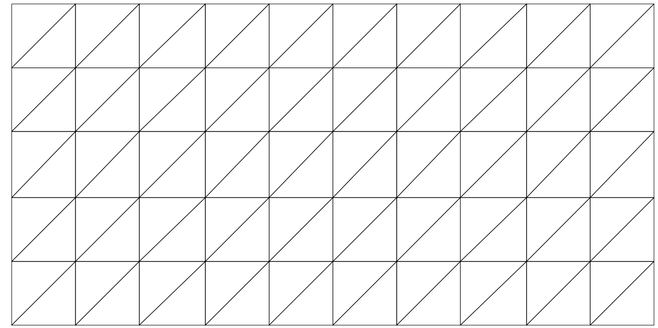


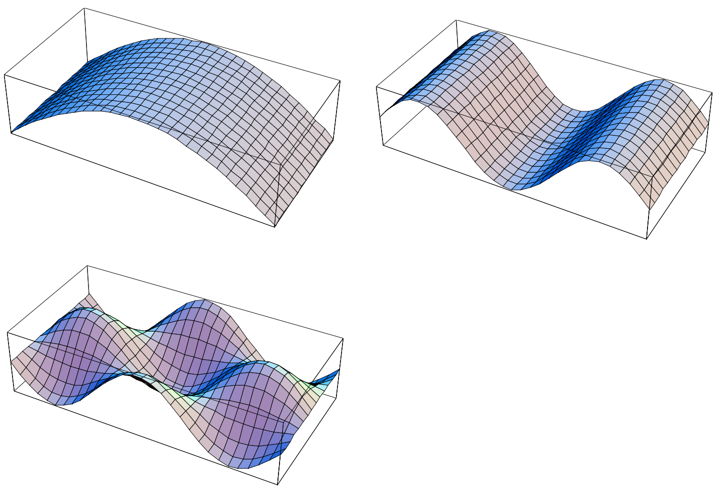
Point

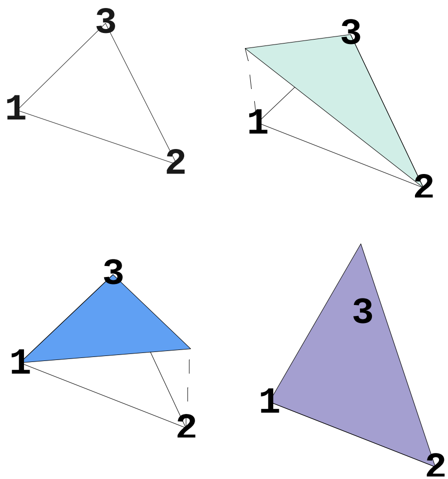
●微分方程式を解くことと停留問題を解くことは同値
●有限要素法では停留問題を解く
●微分方程式を解くことを止めて停留問題を解く
ことにしたので数値的に安定
●ただし、一般の微分方程式に対して汎関数
があるとは限らない（損失があるときなど）
→重み付け残差法（ガラーキン法）が用いられる
ヘルムホルツの方程式を平均の意味で満たすようにする。
汎関数がある問題に対しては汎関数の変分と全く等価。

Basis Functions





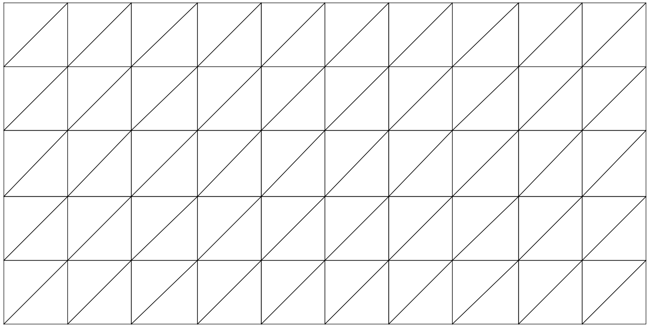


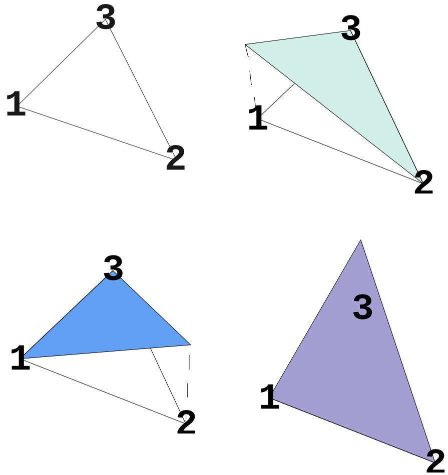


全域基底関数
(レイリー・リッツの方法)

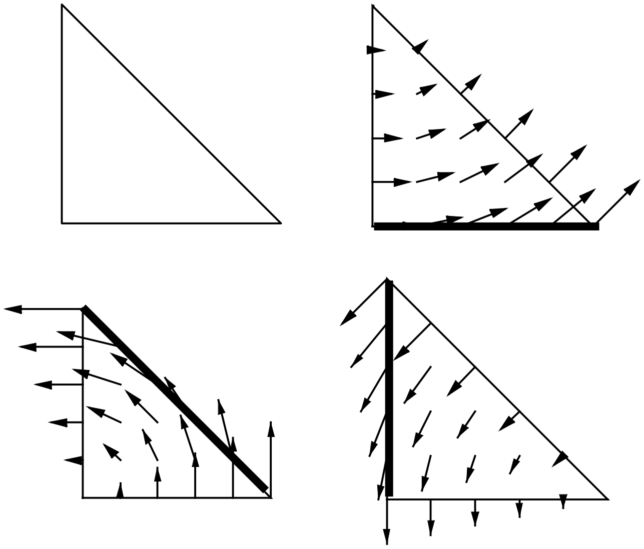
局所基底関数
(有限要素法)

Nodal-based and Edge-based



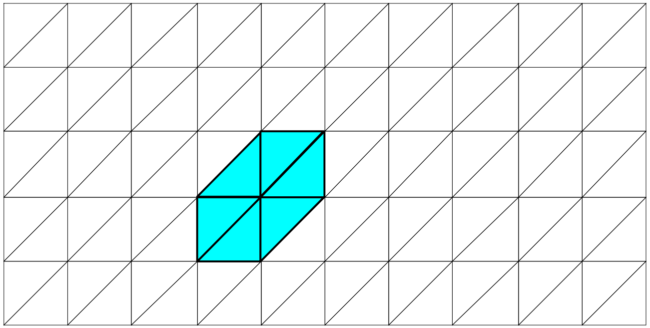


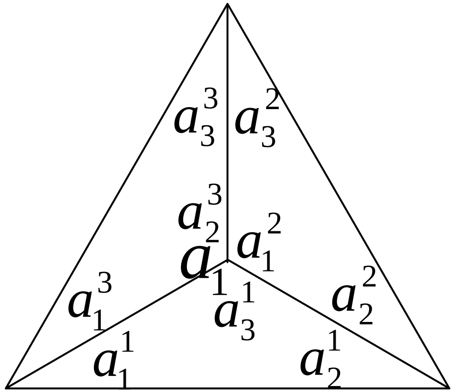
Nodal-based
(Potential)



Edge-based [3]
(Field)

Matrix Form





$$F(\phi)=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}\left[p\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+p\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\beta^2 p\phi^2-k_0{}^2 q\phi^2\right]dxdy-\int_{\Gamma_v}\left(v\phi-\frac{w}{2}\phi^2\right)d\Gamma$$

$$\phi(x,y)=\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{n=1}^{N}a_n^e\phi_n^e(x,y)$$

ただし、同じ頂点となるポテンシャルの未知数は一致する

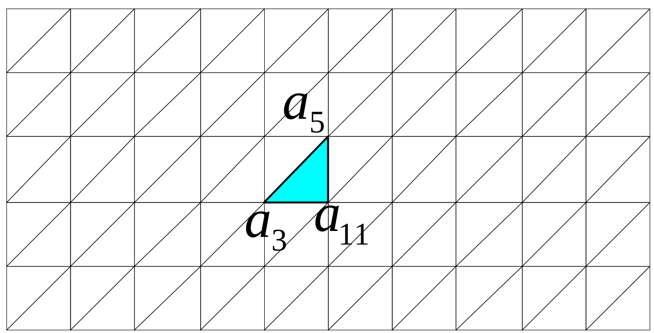
$$a_3^1=a_1^2=a_2^3=a_1$$

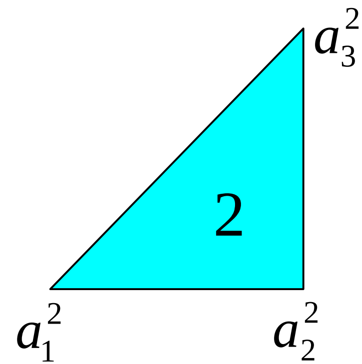
$$F(\phi)=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=m+1}^{N}F_{mn}a_m a_n$$

（aの二次式となる）

上のFの式に展開式を代入するとaの二次式となる。
Fのam*anの項はmとnが同じ要素を構成するポテンシャルのときだけ値を持つ。
なぜならば局所関数を使っていてその要素の外だと0となるからである。

Element Matrix and System Matrix





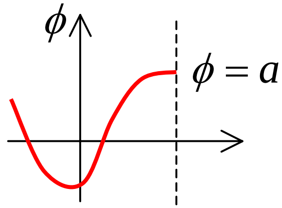
add

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 11 \end{array} \\
\begin{array}{rr} \partial F / \partial a_3 & 3 \\ \partial F / \partial a_5 & 5 \\ \partial F / \partial a_{11} & 11 \end{array} &
\begin{bmatrix} S_{11}^2 & S_{13}^2 & S_{12}^2 \\ S_{31}^2 & S_{33}^2 & S_{32}^2 \\ S_{21}^2 & S_{23}^2 & S_{22}^2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_{11} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

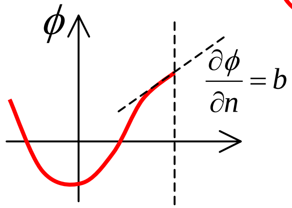
$$
\begin{array}{c} \partial F / \partial a_1^2 \\ \partial F / \partial a_2^2 \\ \partial F / \partial a_3^2 \end{array}
\begin{bmatrix} S_{11}^2 & S_{12}^2 & S_{13}^2 \\ S_{21}^2 & S_{22}^2 & S_{23}^2 \\ S_{31}^2 & S_{32}^2 & S_{33}^2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{bmatrix}
$$

Boundary Condition

- **ディリクレ条件** $\phi = a$



- **ノイマン条件** $\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = b$



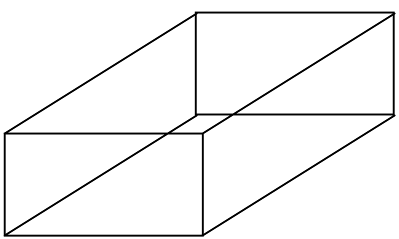
- **混合境界条件** $a\phi + b\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = c$

- **吸収境界条件** エネルギーが戻ってこない
- **周期境界条件** フィールドが周期関数となる

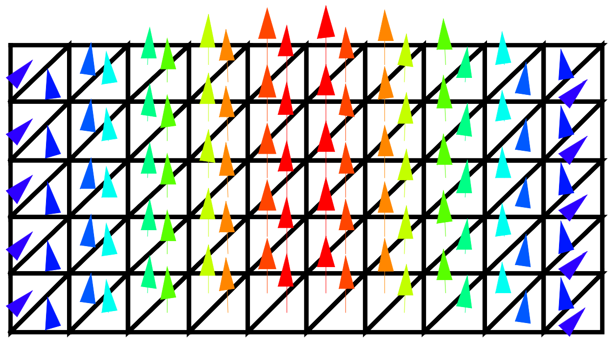
Example: Rectangular Waveguide (TE mode)

fcu (GHz)

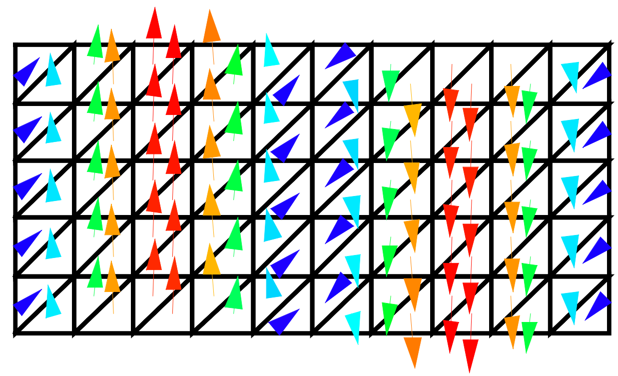
Analytic	FEM
(1,0): 2.58	Mode1: 2.58
(0,1): 5.15	Mode2: 5.13
(2,0): 5.16	Mode3: 5.30
(1,1): 5.76	Mode4: 5.92



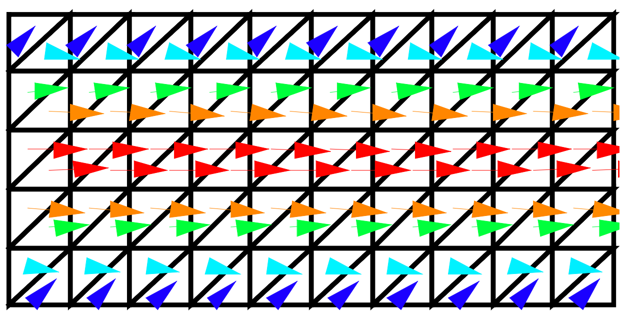
Mode1



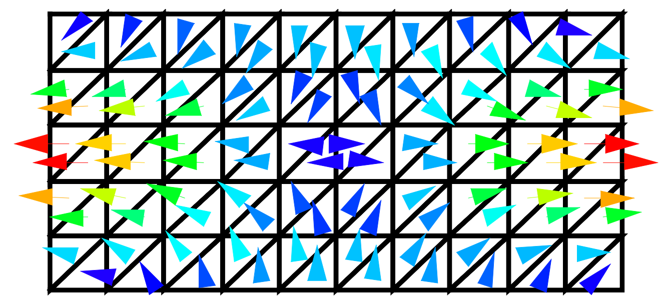
Mode2



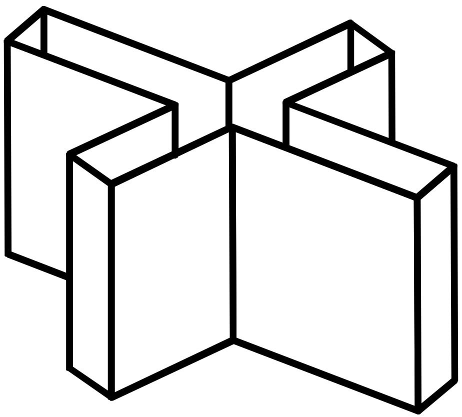
Mode3



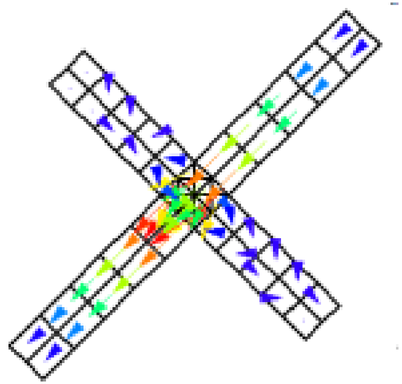
Mode4



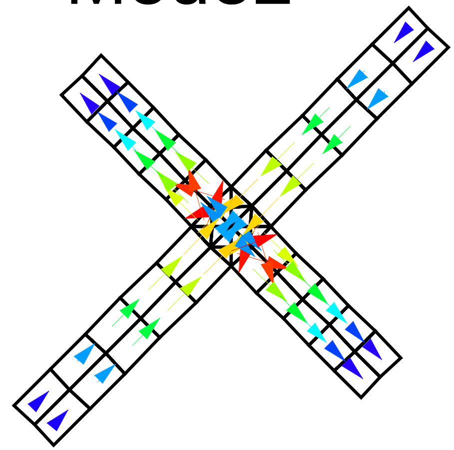
Eigenmode Functions



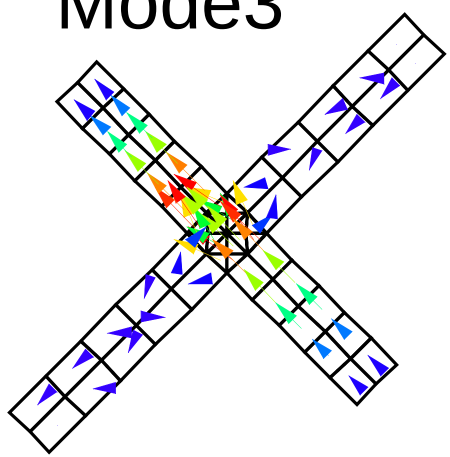
Mode1



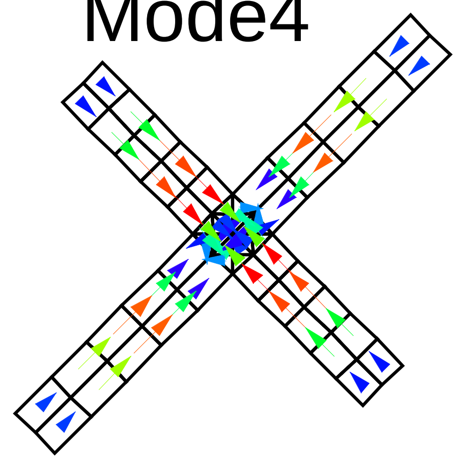
Mode2



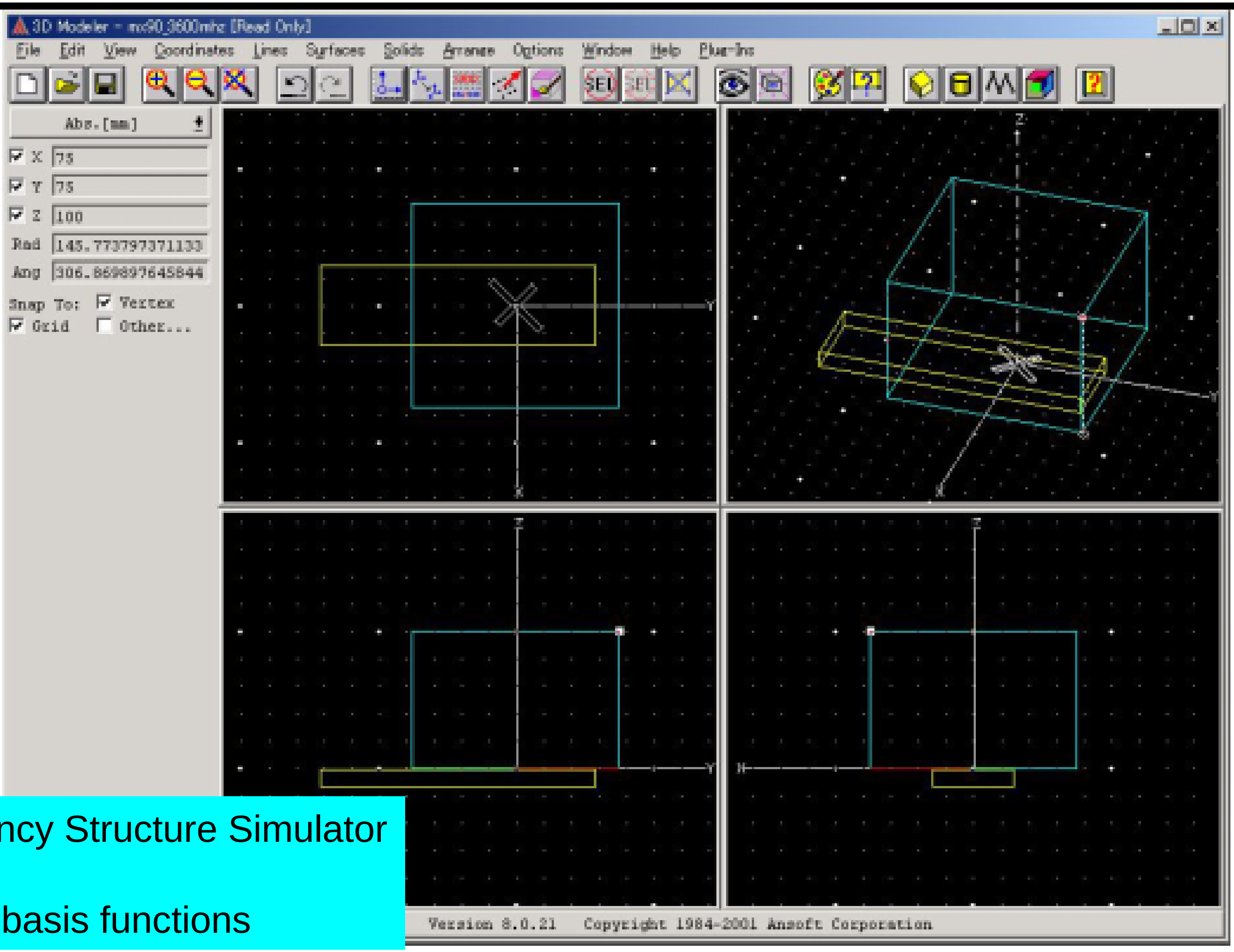
Mode3



Mode4

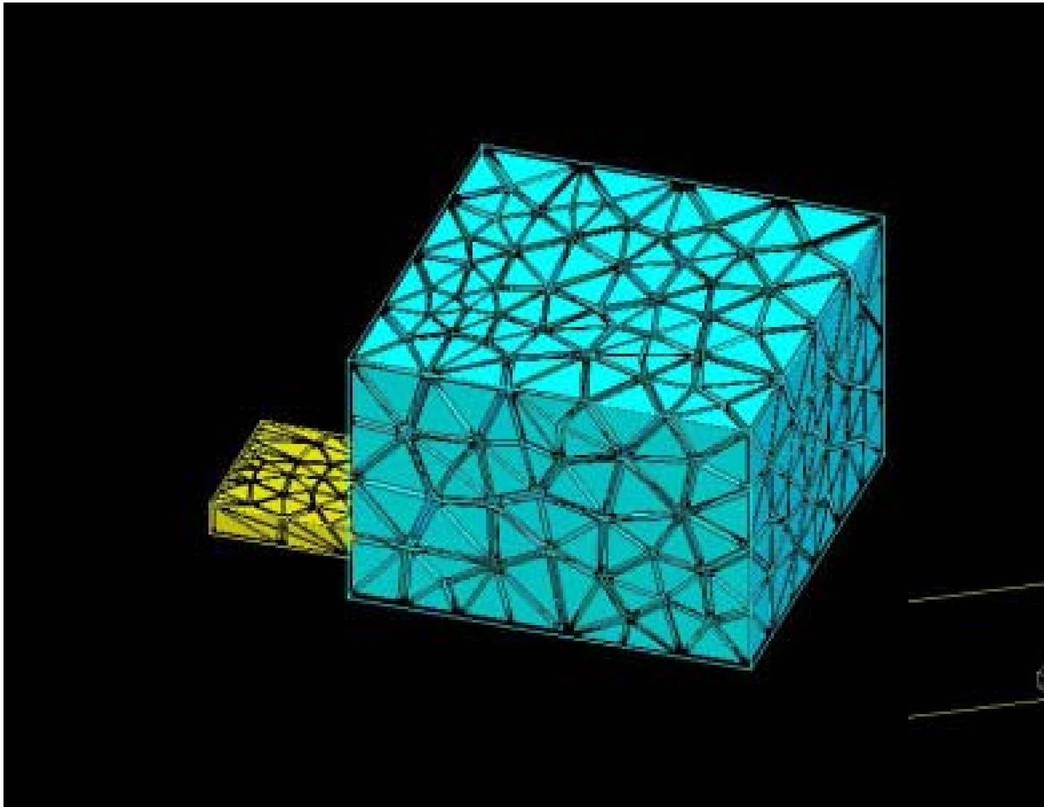


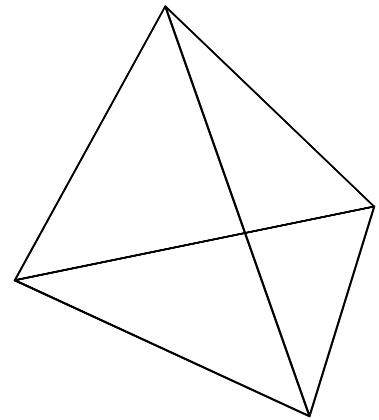
HFSS

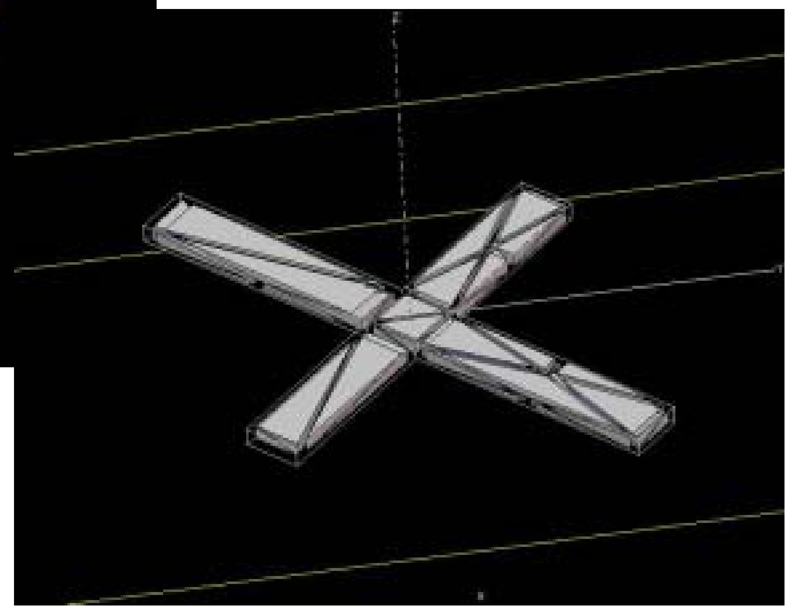


High Frequency Structure Simulator
Ansoft
Edge-based basis functions

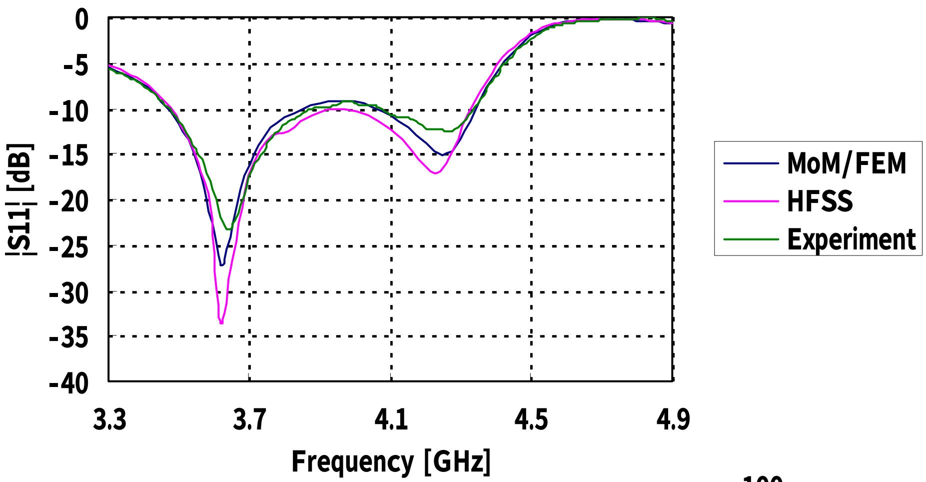
HFSS (mesh)

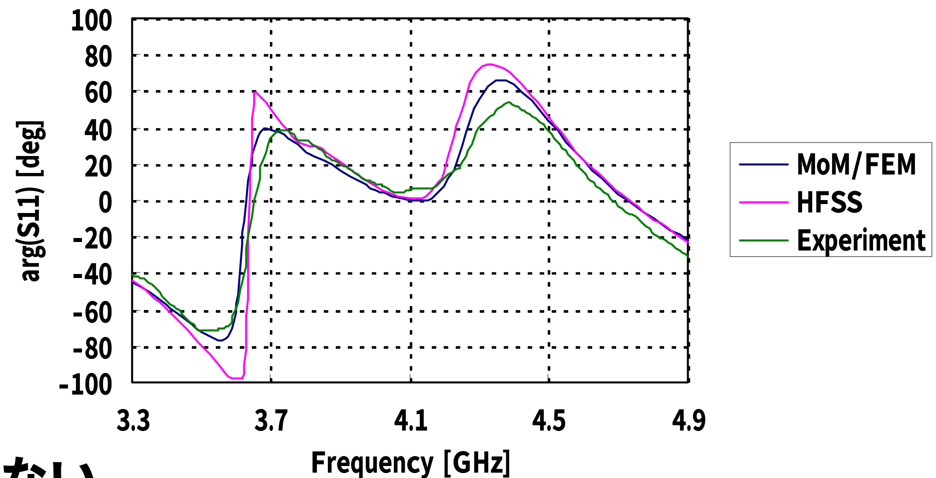






HFSS (Freq. Char. Of S11)





HFSSは合うこともあるが、
市販ソフトを過信してはならない

References

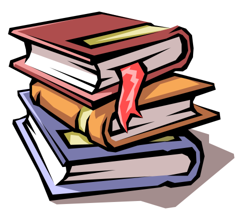
[1] 小柴正則、「高周波電磁界における有限要素法の基礎と実用例」、
2002年4月26日（金）、アンテナ・伝搬における設計解析手法ワークショップ（第22回）

[2] 杉江日出澄 et al、「FORTRAN77による数値計算法」、培風館

[3] J. L. Volakis, A. Chatterjee, L. C. Kempel, “Finite Element Method for Electromagnetics”, IEEE Press, New York, 1998

[4] 加川幸雄、「電気・電子のための 有限要素法入門」、オーム社

[5] 加川幸雄、「電気・電子のための 有限要素法の実際」、オーム社



Conclusion

Fine