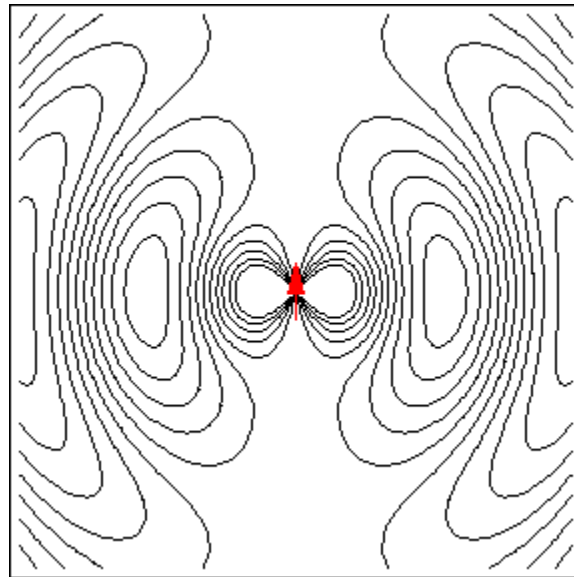


# 電磁波の概要



マクスウェルの方程式(数式)の観点で説明する資料

平野 拓一

# 基礎

## ～ マクスウェルの方程式 ～

微分形

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

積分形

$$\begin{cases} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{cases}$$

## ファラデーの法則

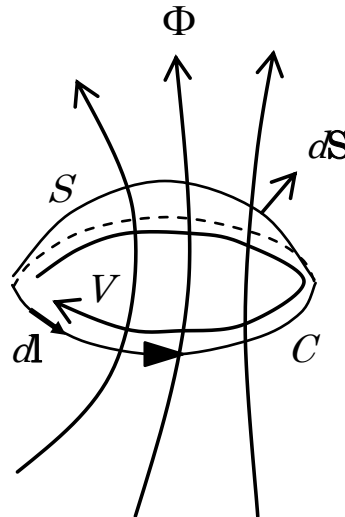
ファラデー: 近接作用、界の概念を提唱

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

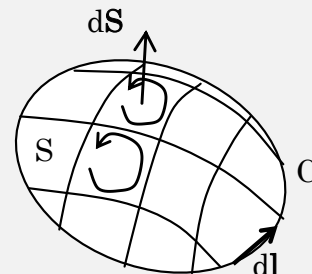
ストークスの定理を使って

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$



ストークスの定理



$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

## アンペアの法則

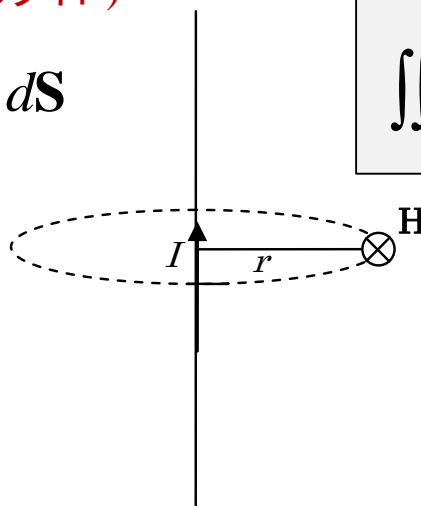
この式には不備がある(次のスライド)

$$H = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow 2\pi r H = I \Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理を使って

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$$



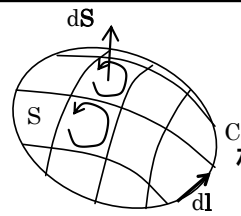
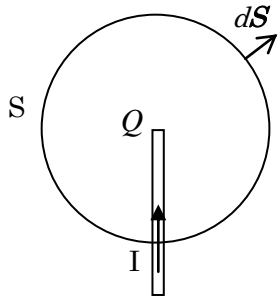
電磁界は空間全体に分布する

# マクスウェルの方程式

アンペアの法則は無有限長電流から導いた不完全なものであった。これが有限長の電流でも成り立つように、電荷保存則（電流連続の式）を組み込んで完成させた。具体的には変位電流をアンペアの法則に組んで修正する。電流連続の式は修正されたアンペアの法則のdivを取ると導かれる。

電流連続の式:

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t} \left( \nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$



構成(媒質)方程式

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

電束密度 ← 誘電率 ← 電界

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

磁束密度 ← 透磁率 ← 磁界

微分形

積分形

ファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

アンペアの法則

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

変位電流

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

変位電流

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

解いてみると

この方程式でマクロな電磁気、電磁波現象の全てが記述可能 (媒質条件、励振条件、境界条件は与える)

① 波になる

$$\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \dots$$

「電磁波」と名付けた

② 速度は光速と一致

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = 2.998 \times 10^8 \text{ [m/sec]}$$

光は電磁波の一部と考えられる

James Clerk Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field,"  
Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.155, pp.459-512, 1865.

# マクスウェルの論文

[ 459 ]

## VIII. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field.* By J. CLERK MAXWELL, F.R.S.

Received October 27,—Read December 8, 1864.

### PART III.—GENERAL EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD.

(53.) Let us assume three rectangular directions in space as the axes of  $x$ ,  $y$ , and  $z$ , and let all quantities having direction be expressed by their components in these three directions.

#### *Electrical Currents* ( $p$ , $q$ , $r$ ).

(54) An electrical current consists in the transmission of electricity from one part of a body to another. Let the quantity of electricity transmitted in unit of time across unit of area perpendicular to the axis of  $x$  be called  $p$ , then  $p$  is the component of the current at that place in the direction of  $x$ .

We shall use the letters  $p$ ,  $q$ ,  $r$  to denote the components of the current per unit of area in the directions of  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

#### *Electrical Displacements* ( $f$ , $g$ , $h$ ).

(55) Electrical displacement consists in the opposite electrification of the sides of a molecule or particle of a body which may or may not be accompanied with transmission through the body. Let the quantity of electricity which would appear on the faces  $dy \cdot dz$  of an element  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  cut from the body be  $f \cdot dy \cdot dz$ , then  $f$  is the component of electric displacement parallel to  $x$ . We shall use  $f$ ,  $g$ ,  $h$  to denote the electric displacements parallel to  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectively.

The variations of the electrical displacement must be added to the currents  $p$ ,  $q$ ,  $r$  to get the total motion of electricity, which we may call  $p'$ ,  $q'$ ,  $r'$ , so that

$$\left. \begin{aligned} p' &= p + \frac{df}{dt}, \\ q' &= q + \frac{dg}{dt}, \\ r' &= r + \frac{dh}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

#### *Electromotive Force* ( $P$ , $Q$ , $R$ ).

(56) Let  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  represent the components of the electromotive force at any point. Then  $P$  represents the difference of potential per unit of length in a conductor

$$\frac{\partial D}{\partial t}$$

Part III (p.480)において

“**The variations of the electrical displacement** must be added to the currents  $p$ ,  $q$ ,  $r$  to get the total motion of electricity...”

とあっさり記述され、導入されている。

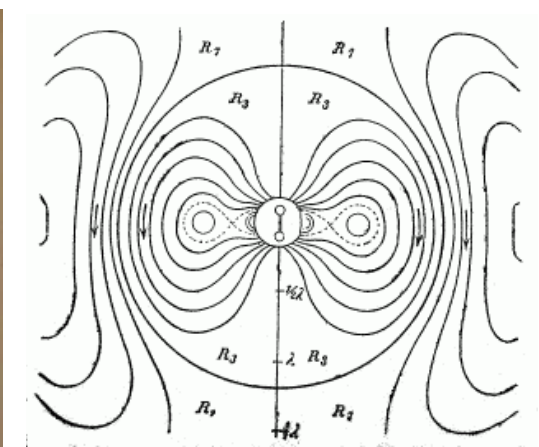
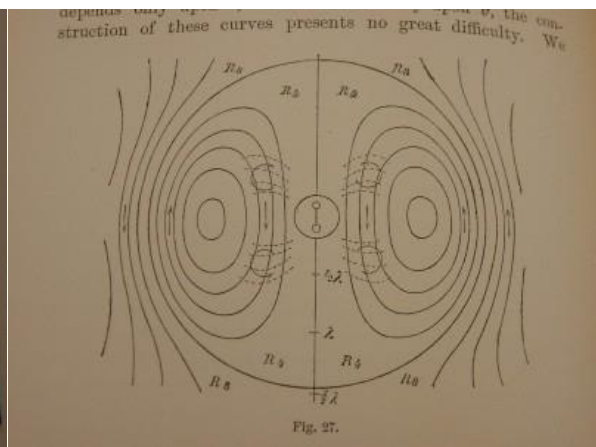
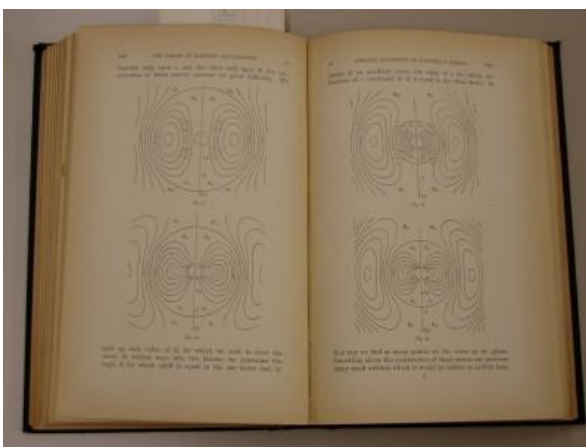
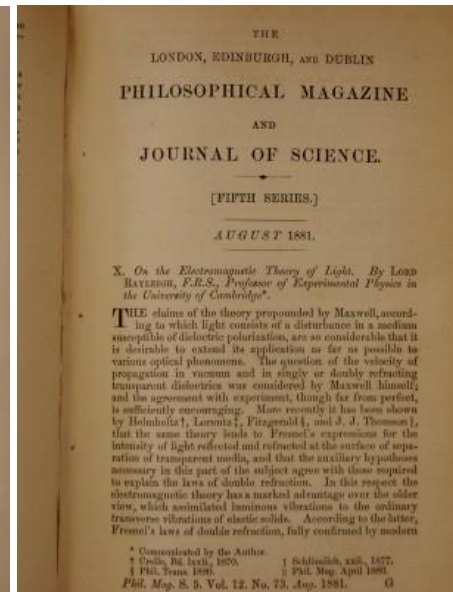
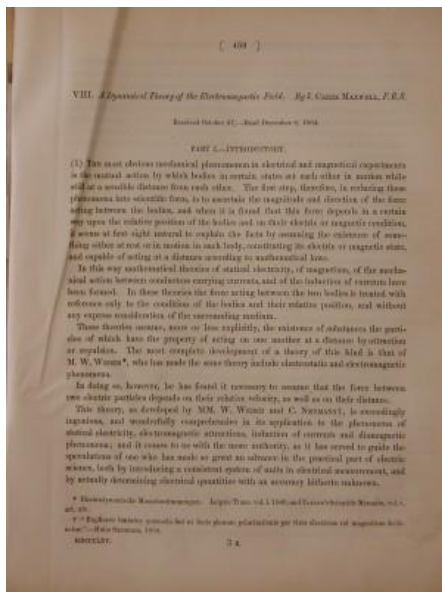
James Clerk Maxwell, “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field,”  
Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.155, pp.459-512, 1865.

## ヘルツの実験

マクスウェルが予言した電磁波を実験的に発生させて確認したのはドイツ人のハインリッヒ・ヘルツ(Heinrich Rudolph Hertz, ドイツ, 1857-1894)であり、1888年に確認された。ヘルツは実験家であるだけでなく、理論家でもあり、1889年に現在「微小ダイポール(infinitesimal dipole)」として知られる波源から放射される電磁界をマクスウェルの方程式から導出し、平面波以外の波源があるときのマクスウェルの方程式の界を計算して、図のような電気力線を描いている。それ故、微小ダイポールはヘルツダイポール(Hertzian dipole)と呼ばれることもある。

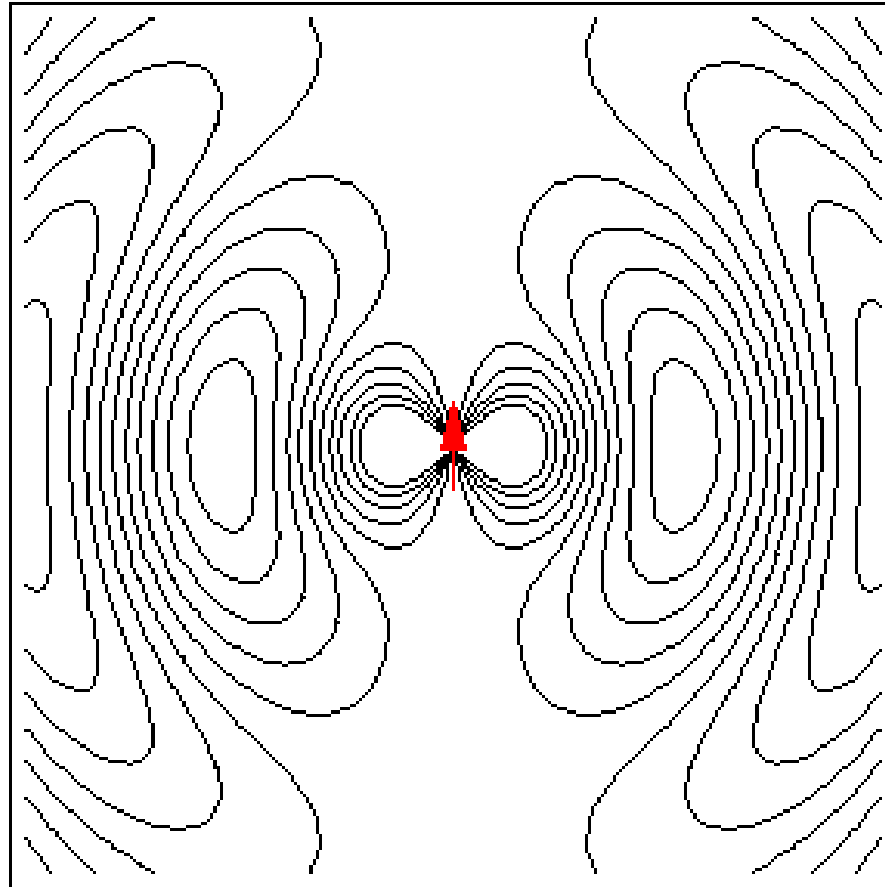
# ヘルツの本

H. Hertz: Electric waves, pp.144-145, Dover pub inc., 1893.



ヘルツは計算機がない時代に上のような電気力線を描いている！

放射される電気力線

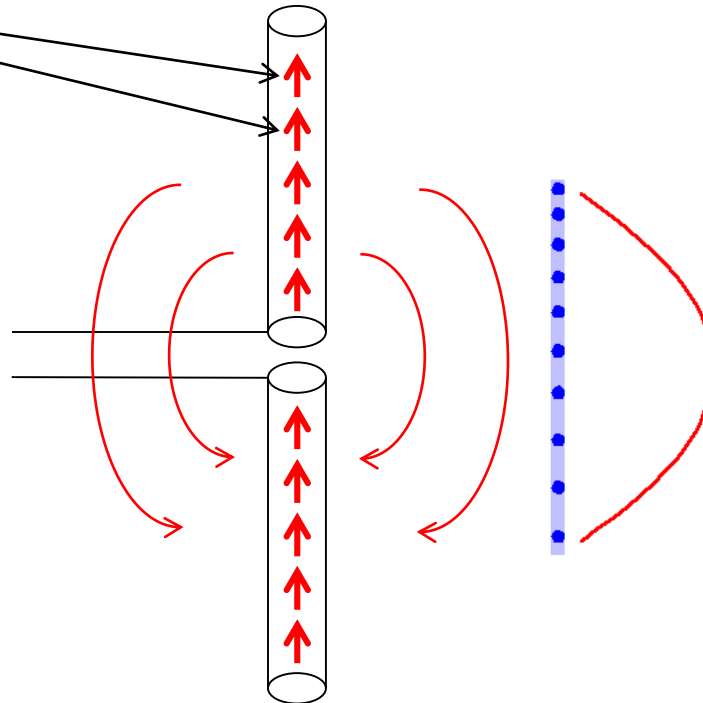
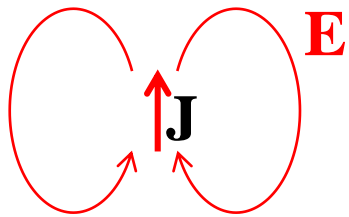
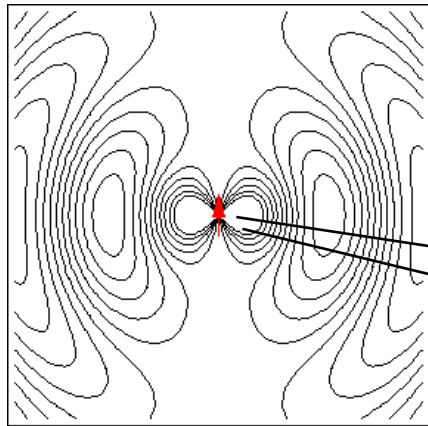


<http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/smalldipole/smalldipole-j.html>



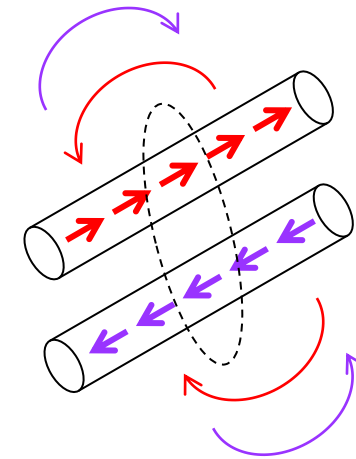
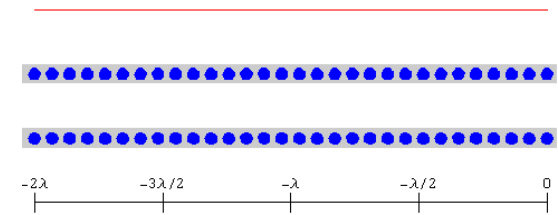
# 線路とアンテナの違い(参考)

任意の電流分布は微小電流素(微小ダイポール)の和と考えると理解しやすい。



アンテナ

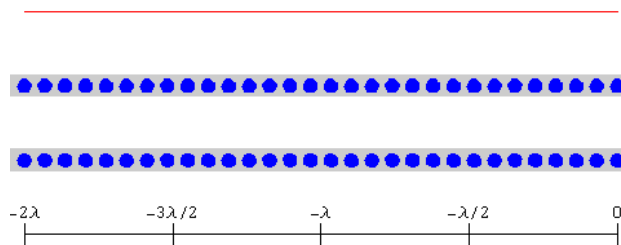
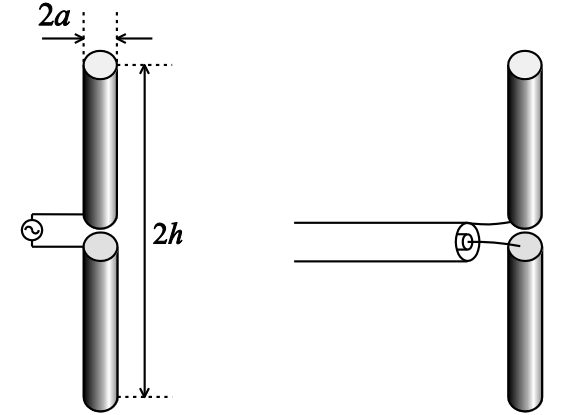
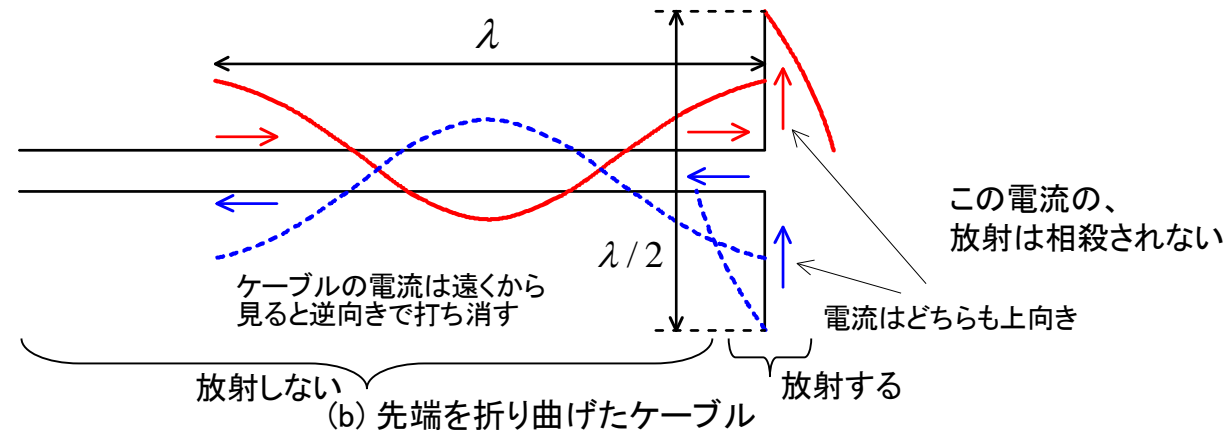
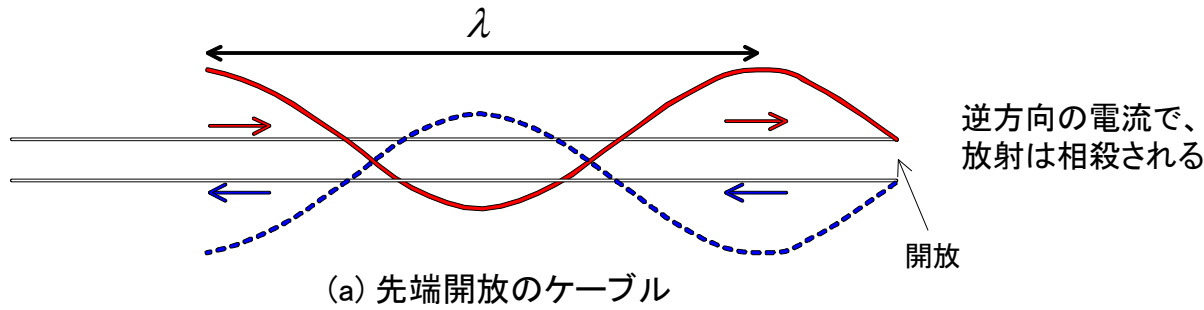
放射は打消し合わない



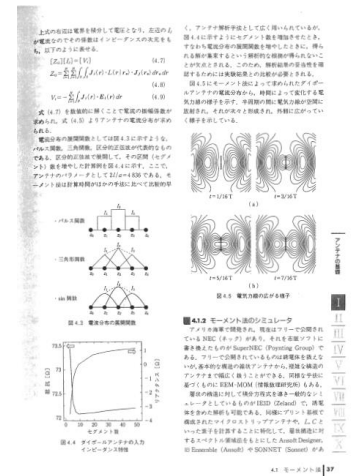
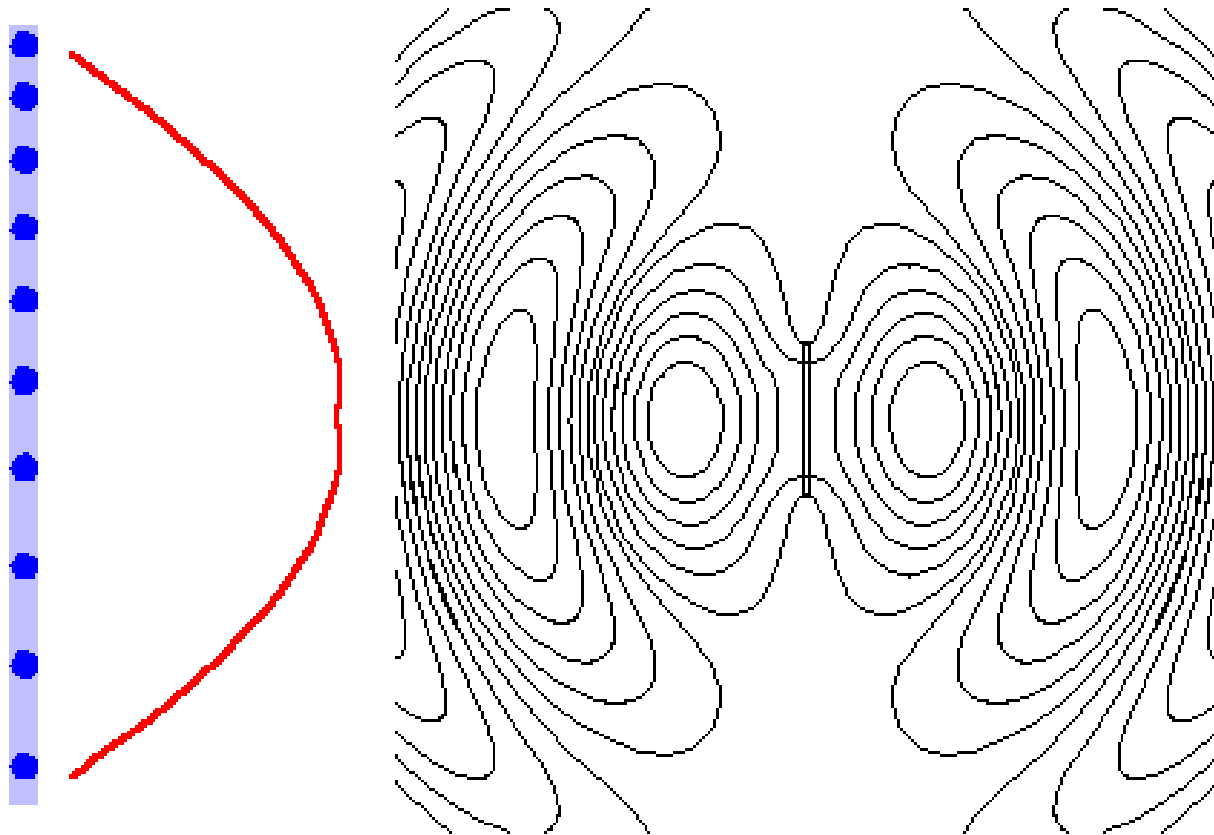
線路

放射は打消しあう

# ダイポールアンテナの動作原理



- ☀️ 時間変化する電流があれば、放射する。(物理現象)
- ☀️ 電線から電波が放射しにくいのは打ち消すから。
- ☀️ 電流が波長に比して短いと放射効率は悪い。



<http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/halfdip/halfdip-j.html>

## 電気力線の描き方

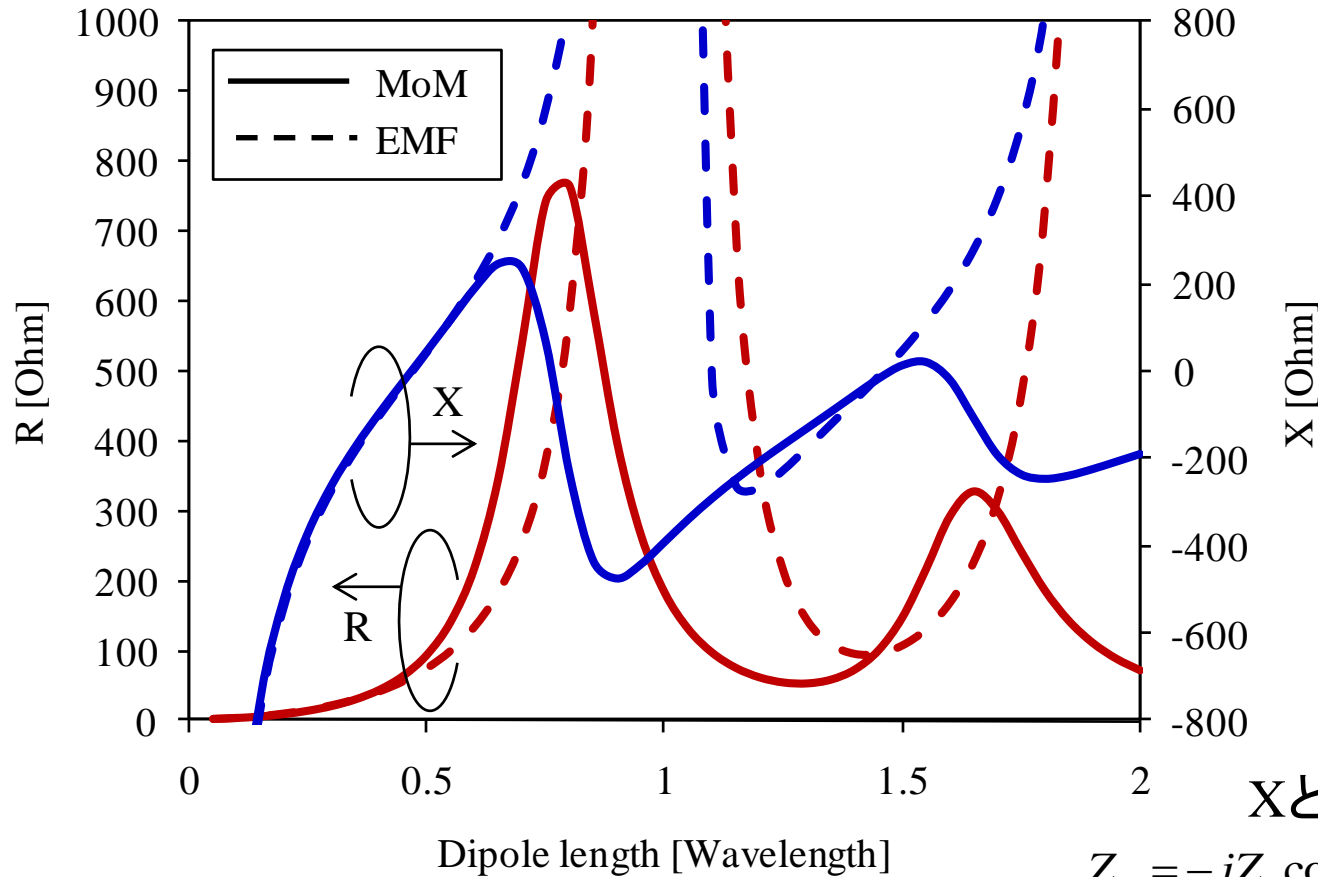
[http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/smalldipole/field\\_lines.pdf](http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/smalldipole/field_lines.pdf)

平野拓一 他, “半波長ダイポールアンテナのモーメント法解析結果を用いた電気力線の描き方,”  
電子情報通信学会ソサイエティ大会講演論文集, CS-1-1, 2013年9月19日.

「アンテナ・無線ハンドブック, p.37, オーム社, 2006年」の図面もこの手法で描かれたものである。

# 計算例 (ダイポールアンテナ)

## 入力インピーダンス (MoMと起電力法の比較)



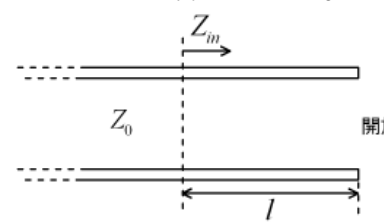
## 半波長ダイポール

$$\text{MoM} \quad Z_{in} = 93 + j43$$

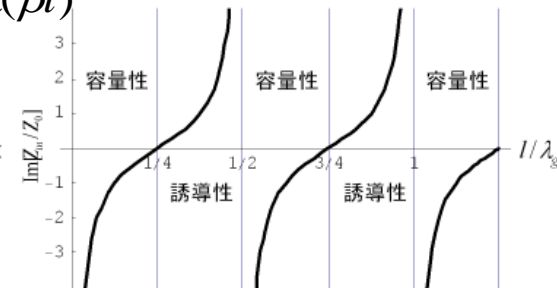
$$\text{EMF} \quad Z_{in} = 73 + j43$$

## Xと終端開放線路の関係

$$Z_{in} = -jZ_0 \cot(\beta l)$$



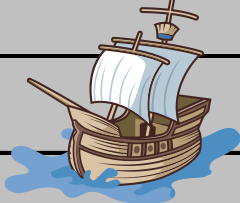
(a)

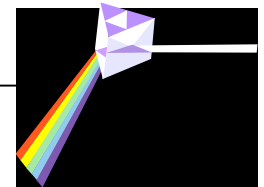
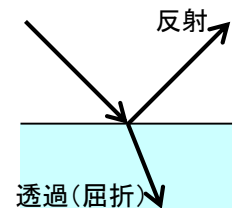


(b)

## 電磁波発見の歴史 (1/4)

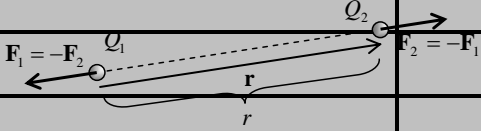
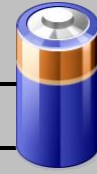


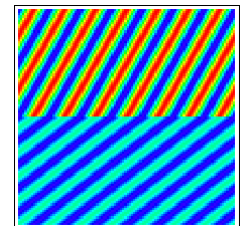
年代	分野		
	電気	磁気	光
紀元前7世紀		天然磁石の発見	
紀元前6世紀	ターレス(ギリシア)が琥珀をこすると物を引き付ける(静電気)ことを発見		
紀元前3世紀		中国で指南車(羅針盤)の発明	
300B.C.			ユークリッド(ギリシア)が光の直進性、反射の法則を発見
13世紀		ヨーロッパに磁気羅針盤(コンパス)が伝わる	
1269A.D.		ペレグリヌス(フランス)による磁石の極の記述	
1600		ギルバート(イギリス)が磁石の性質を研究。地球が磁石であることを発見	
1620			スネル(オランダ)がスネルの法則(光の屈折の法則)を発見
1660			フェルマー(フランス)がフェルマーの原理(光の反射・屈折の法則)を発見
1666			ニュートン(イギリス)による光の分散(プリズム)の発見
1675			レーマー(デンマーク)が木星の衛星の観測による光速測定をする
1678			ホイヘンス(オランダ)が光の波動説を提唱



<http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/history/index.html>

## 電磁波発見の歴史 (2/4)


年代	分野		
	電気	磁気	光
1745	クライスト(ドイツ)がライデン瓶を発明		
1746	ミュゼンブルク(オランダ)ライデン瓶を発明		
1752	フランクリン(アメリカ)が雷の正体は電気であることを発見		
1780	ガルバーニ(イタリア)が動物電気(死んだカエルの足に電気を流すと動く)を発見		
1785	クーロン(フランス)がクーロンの法則を発見	$F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2}$ 	
1799	ボルタ(イタリア)がボルタ電池を発明		
1808			マリユス(フランス)が反射による偏光(偏光角=ブリュースター角と関連)現象を発見
1815			ブリュースター(イギリス)が偏光角の法則を発見
1816-1819			フレネル(フランス)が光の回折、偏光の波動論を研究
1820	エルステッド(デンマーク)が電流の磁気作用を発見		
1820	アンペール(フランス)がアンペールの法則を発見		
1820	ビオ(フランス)とサバール(フランス)がビオ・サバールの法則(微小電流素が作る磁界)を発見		
1823			フレネル(フランス)がフレネルの公式(反射・透過係数の振幅を与える公式)を発見



<http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/history/index.html>

## 電磁波発見の歴史 (3/4)

年代	分野		
	電気	磁気	光
1826	オーム(ドイツ)がオームの法則を発見		
1831	ファラデー(イギリス)がファラデーの法則(電磁誘導の法則)を発見、コンデンサの研究を行う		
1832	ヘンリー(アメリカ)が自己誘導を発見(インダクタンスの導入)		
1834	レンツ(ロシア)がレンツの法則を発見		
1836	ダニエル(イギリス)がダニエル電池を発明		
1837	ファラデー(イギリス)が電気の近接作用論を提唱		
1845		ファラデー(イギリス)がファラデー効果(磁気旋光効果)、反磁性を発見	
1849			フィゾー(フランス)が回転歯車による光速の測定
1855	フーコー(フランス)が渦電流を発見		
1859	プランテ(フランス)が蓄電池を発明		
1860	キルヒホッフ(ドイツ)がキルヒホッフの法則を発見		
1864	マクスウェル(イギリス)がマクスウェルの方程式を発見(提唱)、電磁波の存在を予言、光の電磁波説を提唱		
1870	ヘルムホルツ(ドイツ)が電磁波の境界条件を導出		
1871			レイリー(イギリス)が分子振動子の観点から太陽光の散乱を研究(レイリー散乱)


 電波の予言(理論)

<http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/history/index.html>

## 電磁波発見の歴史 (4/4)

年代	分野		
	電気	磁気	光
1875	カー(イギリス)がカー効果(電気光学効果)を発見		(カー効果は光にも関係)
1879			エジソンが白熱電球の特許を申請
1882	エジソン(アメリカ)がニューヨークに直流発電所を作る		
1887			マイケルソン(アメリカ)とモーリー(アメリカ)がマイケルソン・モーリーの実験を行う(光波の媒質となるエーテルは存在しないことを実験で確認) →光は波動ではない! ?この時点では説明不能
1887			ヘルツ(ドイツ)が光電効果を発見 →この時点では説明不能
1888	ヘルツ(ドイツ)がマクスウェルが予言した電磁波の存在を実験で確認		
1895	ローレンツ(オランダ)が運動物体の電磁工学理論(ローレンツ力)を研究		
1895	レントゲン(ドイツ)がX線を発見		
1897	トムソン(イギリス)が電子の存在を実験で確認		
1897	マルコーニ(イタリア)が無線電信(イギリス-フランス間)に成功		
1901	マルコーニ(イタリア)が無線電信(イギリス-アメリカ間)に成功		
1905	アインシュタイン(ドイツ)が特殊相対性理論を発見(提唱)		
1905	アインシュタイン(ドイツ)が光量子仮説を発見(提唱) →電磁波の波動と粒子の二重性。マイケルソン・モーリーの実験、光電効果が説明可能		



電波の確認(実験)

無線通信の実用化

<http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/history/index.html>