

共振現象と固有モード解析

ーモーメント法における電流分布の固有モード解析ー

2004/10/5 平野拓一（東京工業大学）

キーワード: 共振現象, 固有値問題, 対角化, 固有モード関数, 固有値, 固有ベクトル, 行列方程式, モーメント法

Keywords: resonance phenomena, eigenvalue problem, diagonalization, eigenmode function, eigenvalue, eigenvector, matrix equation, method of moments

1. はじめに

モーメント法(Method of Moments, Moment Method, MoM)解析[1]では普通、行列方程式で右辺ベクトルを有する「励振問題」を解くが、どのようなモード（姿態）がどの周波数で共振するかを解析する「固有モード解析」を行う方法について考える。

また、分野を電気・電子工学に限定せず、共振現象とは何かを行列表現により理解する。さらに、励振問題の行列方程式を表現する行列を対角化して解を固有ベクトルの線形結合で表現することにより、共振問題について、一般的に共振モードは振幅が大きいことを理解する。電気・機械・建築・土木・航空・航空宇宙・音響・経済などの分野に共通する全ての共振現象の問題を行列の対角化により、一般的に理解することを目的とする。

2. 励振問題と固有モード解析

2.1 普通の励振問題のモーメント法解析

周波数を決めて(ω や k は固定)次の行列方程式を作り、 $[I]$ ベクトルについて解く。

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.2 $\omega(k)$ を固定した固有値解析

$[Z]$ 行列は式(1)と同じものを用い(ω や k は固定)、とりあえず次の式を書いてみる。 λ も未知数

で、スカラー λ とベクトル $[I]$ が未知数の固有値問題である。これはどのような意味を持つのだろうか？

$$\left[\begin{array}{c} Z \\ \parallel \\ I \end{array} \right] = \lambda \left[\begin{array}{c} I \\ \parallel \\ I \end{array} \right] \quad (2)$$

[考察]

$\lambda = 0$ に対応する $[I]$ は(これを $[I]_{\lambda=0}$ と書く)、その周波数での共振モードとすることができる。なぜならば、

$$\left[\begin{array}{c} Z \\ \parallel \\ I \end{array} \right]_{\lambda=0} = \lambda \left[\begin{array}{c} I \\ \parallel \\ I \end{array} \right]_{\lambda=0} = 0 \left[\begin{array}{c} I \\ \parallel \\ I \end{array} \right]_{\lambda=0} = 0$$

となり、 $[I]_{\lambda=0}$ は $[Z]$ を左から作用させたら0になるベクトルであって、式(1)の解に $[I]_{\lambda=0}$ を何倍して足しても、それはまた解となるからである。

証明 1)

$[I]_{\text{sol}}$ を式(1)の解とすると、 $[Z][I]_{\text{sol}} = [V]$ を満たす。

ここで、 $[I]_{\text{sol}} + c[I]_{\lambda=0}$ (c は任意のスカラー)もまた式(1)の解であることを証明する。

$$[Z]([I]_{\text{sol}} + c[I]_{\lambda=0}) = \underbrace{[Z][I]_{\text{sol}}}_{=[V]} + \underbrace{c[Z][I]_{\lambda=0}}_{=0} = [V]$$

よって、 $[I]_{\text{sol}} + c[I]_{\lambda=0}$ は式(1)の解である。■

そもそも**共振(resonance)**とは何かと言うと、純粋な共振はこのような固有値 $\lambda = 0$ に対応する分布で、このモード $[I]_{\lambda=0}$ を一度励振したら減衰することなく、永久に存在し続け、外部から同相で励振したらその振幅は無限大にもなり得るものである。なぜならば、証明 1 で示したように、どんなに大きな振幅の $[I]_{\lambda=0}$ の形も解になり得るし、励振を止めても($[V] = 0$ にしても)固有値 $\lambda = 0$ に対応する共振モードは減衰せずに存在し続けるからである。もし $\lambda = 0$ でないならば、励振しているときに存在したモードでも、励振を止めて時間が経つとそのモードは減衰し、ついには0になってしまう。(その意味で、電気回路の共振回路でRが入っているときでも|I|が最大になるときを共振と言うが、実際にはRがあると減衰するので、Rが無いときに|I|が無限大になるときを共振といい、Rがあるときは「準共振」などと言う名前をつけて区別した方が誤解ないと思う。)

共振条件をもう一度明らかにしておくと、0でない $[I]$ に対して

$$\left[\begin{array}{c} Z \\ \parallel \\ I \end{array} \right] = 0 \quad (3)$$

が成り立つこと、つまり、

$$\det\left(\begin{array}{c} \\ Z \\ \end{array}\right) = 0 \quad (4)$$

が成り立つことである($\det(Z) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ である)。

ここで、式(1)の[Z]を対角化して固有ベクトル(eigenvector) (これは、重み係数ベクトルとして電流などの分布形状を表すとき固有モード関数(eigenmode function)などとも言われる)とその固有値(eigenvalue)の意味について考察してみよう。列固有ベクトルを並べた行列Sと固有値が対角要素の対角行列Λを用いて次のように分解(対角化)できる。

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} = S \Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix}^{-1} \quad (5)$$

これを式(1)に代入すると、

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix}^{-1} [I] = [V]$$

ここで、

$$[I] = a_1 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_1 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + a_n \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_n \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[V] = v_1 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_1 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_n \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

と固有モード展開する。固有モード展開することの意味は、「完備(complete)」で「直交(orthogonal)」な基底で表し、各基底は[Z]で変換してもそのスカラー(固有値)倍になるだけである。 a_i は電流ベクトルのモードiの基底関数の重み係数(展開係数)、 v_i は励振ベクトルのモードiの基底関数の重み係数である。 v_i は固有ベクトルの直交性から、式(7)の両辺に左側から \mathbf{u}_i^t (右肩のtは転置[transpose]を表す)を作用させる(ベクトルの内積を取る) と、

$$v_i = \frac{1}{|\mathbf{u}_i|^2} \left(\begin{array}{c} | \\ | \\ \mathbf{u}_i \\ | \\ | \end{array} \right)^t [V] \quad (8)$$

と求めることができる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix}$$

$$a_1 \lambda_1 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_1 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + a_n \lambda_n \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_n \\ | \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_1 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_n \\ | \end{bmatrix}$$

$$(a_1 \lambda_1 - v_1) \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_1 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + (a_n \lambda_n - v_n) \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_n \\ | \end{bmatrix} = 0$$

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ は線形独立なので、

$$a_i = \frac{v_i}{\lambda_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (9)$$

よって、固有値 λ_i の絶対値 $|\lambda_i|$ が小さなモードほど小さな電圧でも大きな電流が流れる。それは励振状態にもより、 $v_i = 0$ ならばもちろん励振されないが、一般にはアンテナを一点給電する場合には式(8)から v_i が 0 になることはまず無く、共振モード、つまり $|\lambda_i|$ が 0 に近いモードの電流分布は非常に大きくなる。大きな電流が流れれば電磁界が強くなり放射されるので、アンテナの問題では共振状態にしたいことが多い。

それとは逆に、建築の分野では地震の共振周波数にビルの共振周波数が一致したら揺れが大きくなってしまっていて危ないので、地震の波の周波数成分の統計データを調べ、地震に共振してビルが大きく揺れ、変形が大きくなってビルが崩壊しないように地震の周波数成分とビルの共振周波数をわざとずらして設計する。吊橋などでも、アメリカのタコマ橋は弱い風で共振し、崩壊する事故があった（励振するのは直流の風ではなく、風が橋に当たって橋の風下側で発生するカルマン渦である）。それ以後、風の統

計データをよく調べて、それにより発生するカルマン渦の周波数と吊橋の共振周波数が一致しないように設計されるようになった。航空機やロケットなどその他の巨大建造物も同様に共振問題を考えて設計されている。

式(9)より、式(6)の基底関数の重みが求まったので、実はこれで式(1)を解いたことになる（普通は式(1)の計算にはガウスの消去法を使うから、固有値問題を利用した解き方が効率悪いのは言うまでもないが）。

最後になってしまったが、モード(mode)という用語について説明する。モードとは日本語では^{したい}姿態と訳され、線状アンテナの MoM 解析では電流分布の形状を表す。電流分布の形状は固有値問題の固有ベクトルに相当するが、固有値と固有ベクトルの組をモードと言うことがある。つまり、上の説明では $(\lambda_i, \mathbf{u}_i)$ の組をモードと呼ぶのである。固有値の絶対値は共振の度合いを表し、固有ベクトルはそのモードの分布形状を表すのである。

式(9)を見てもう一度「共振」の定義をすると、 $|\lambda|=0$ となるモードを共振モードと定義する。

しかし、実際には完全に $|\lambda|=0$ となることはなく、 λ には小さな実部 $\text{Re}[\lambda]$ が存在し(電気回路の問題では抵抗により、アンテナの問題では放射による)、周波数によってあまり変化しない。一方、虚部 $\text{Im}[\lambda]$ は周波数によって大きく変化し、 $|\lambda|$ はほぼ $\text{Im}[\lambda]$ に等しい。従って、 $|\lambda|$ が極小値を取るとき、あるいは $\text{Im}[\lambda]=0$ となるとき、そのモードの共振と定義する。このように共振の定義は一意に定まっている訳ではないが、電気回路などの共振周波数の定義は後者のようにリアクタンスが 0 となる周波数（そのとき、損失がある回路ではインピーダンスは純抵抗となる）で定義されることが多い。

2.3 $\omega(k)$ を決定せず、固有値（共振周波数）として扱う固有値解析

式(1)では左辺の $[Z]$ 行列において周波数 ω はある値に決めていたが、共振周波数を求める固有値問題では ω を変数として扱う。そして、共振条件(式(3))のは次のようになる。

$$\begin{bmatrix} Z(\omega) \\ I \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

ここで、上の式は形式的に次のように式変形出来たとしてみよう。

$$\begin{bmatrix} Z' \\ I \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$$

ただし、 $[Z']$ には ω は含まれていないとする。上の表現は ω と $[I]$ が未知数であり、固有値問題そのものである。ただし、式(10)において、 ω は $[Z(\omega)]$ の中で線形に表れない

(自由空間のグリーン関数を用いたリアクションだから[3]) ので、式(10)は上の式のように簡単に表すことが出来ない。仕方ないので、式(10)を用いて共振モードがどの周波数で現れるか探索するために、次のような数値的検索手法を用いる。

[Step1] ω を「小さな値」に固定する。ここで、「小さな値」というのは、構造物が半波長以下に収まる程度の周波数に設定することを意味する。

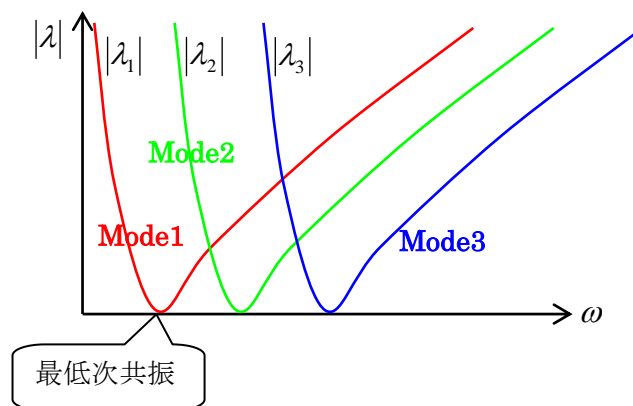
[Step2] 式(10)ではなく、次の式の固有値問題を解く。

$$\begin{bmatrix} Z(\omega) & I \\ I & \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} I \\ \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 ω は固定されているから未知数はスカラー λ とベクトル $[I]$ の固有値問題である。

[Step3] $[I]$ の分布形状を見て着目するモードを選び (周波数を変えて $[Z(\omega)]$ 行列が変わっても固有ベクトルの分布は変わらない)、各モードの固有値 λ を横軸 ω 、縦軸 $|\lambda|$ のグラフにプロットしておく。

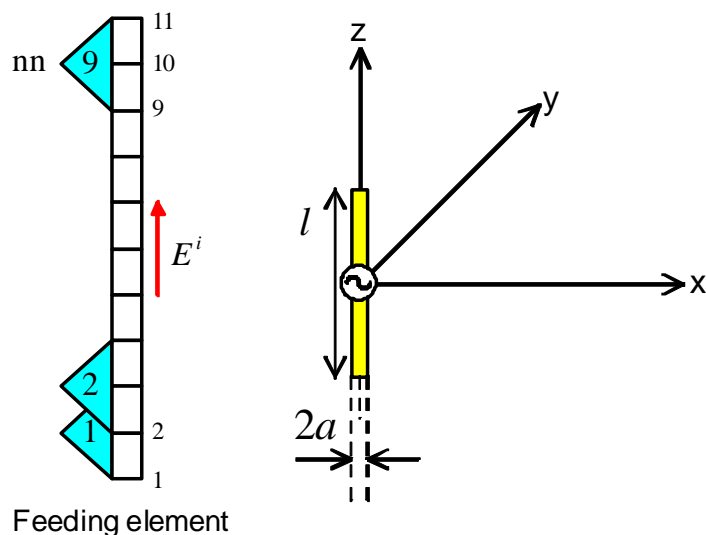
[Step4] ω を少し大きくし、Step2～Step3 を繰り返し、 $\omega \cdot |\lambda|$ グラフを完成させる。



[Step5] Step4 で完成した $\omega \cdot |\lambda|$ グラフでそれぞれのモードは $|\lambda| \cong 0$ となる周波数が 1 つある。この周波数とそのモードの共振周波数である。

3. 線状ダイポールアンテナの固有モード解析例

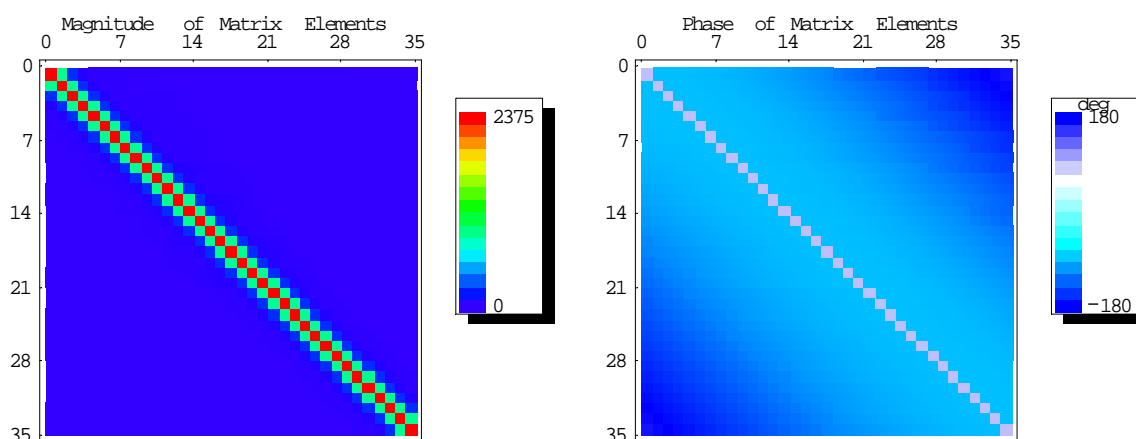
線状アンテナのモーメント法解析[3]で 2 節の考察を確認する。解析プログラムは *Mathematica* で作成し、付録 A.1 に示す。



35 セグメントに分割して解析した例

3.1 リアクション行列

行列は対称行列になる。下は半端長ダイポールの解析例

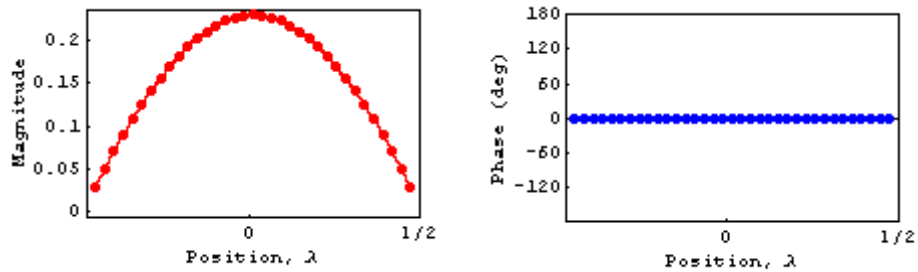


3.2 モード関数

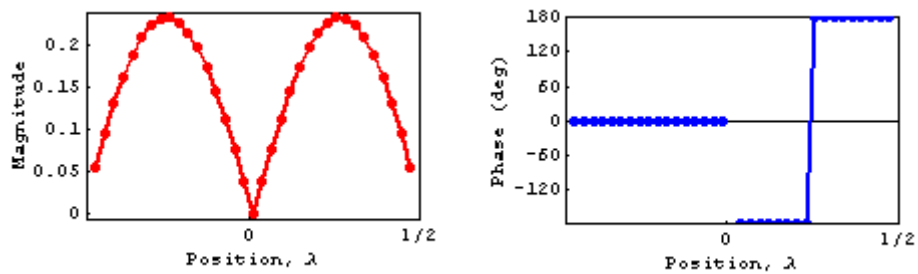
ダイポールの長さが短い（半波長以下）のとき、 $[Z]$ の固有ベクトル（電流分布）を固有値の絶対値の小さい順に 4 つのモードを描くと下のような（直感的に得たかった）モード関数が得られる。どの周波数の $[Z]$ 行列で（あるいはどんなダイポール長で）固有モードを計算しても、分布

形状は同一のものが得られる（ただし、後で説明するようにそのモードの固有値は異なる）。

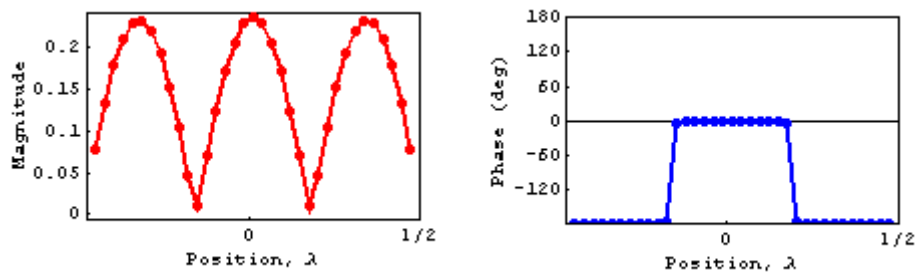
Mode1 の電流分布



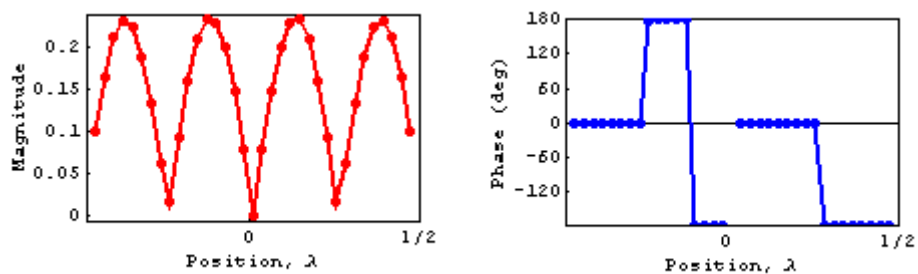
Mode2 の電流分布



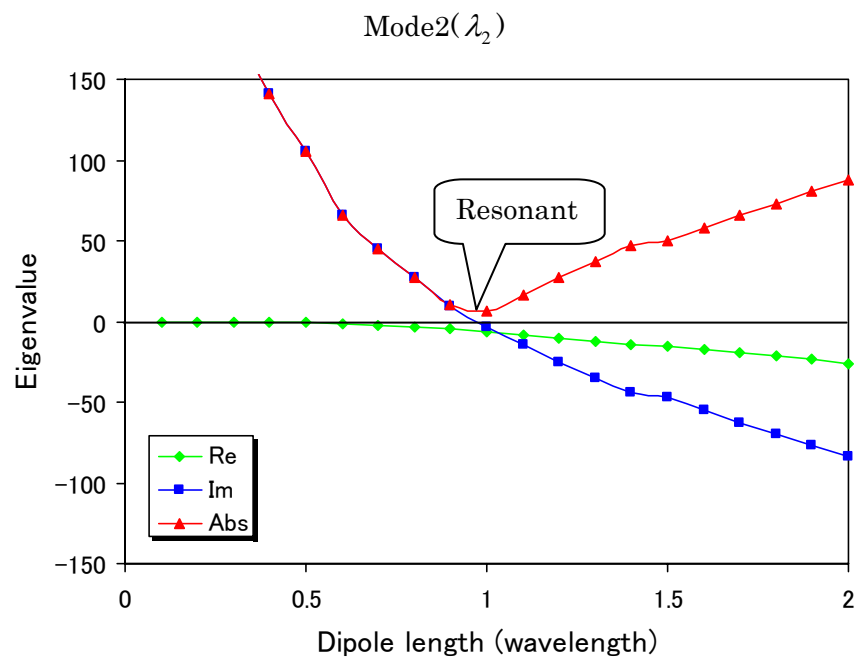
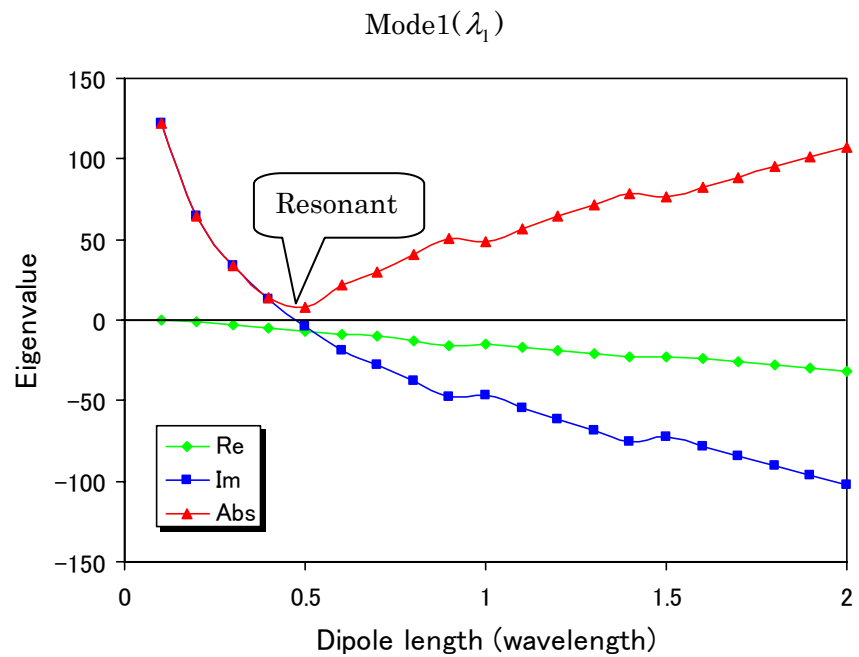
Mode3 の電流分布

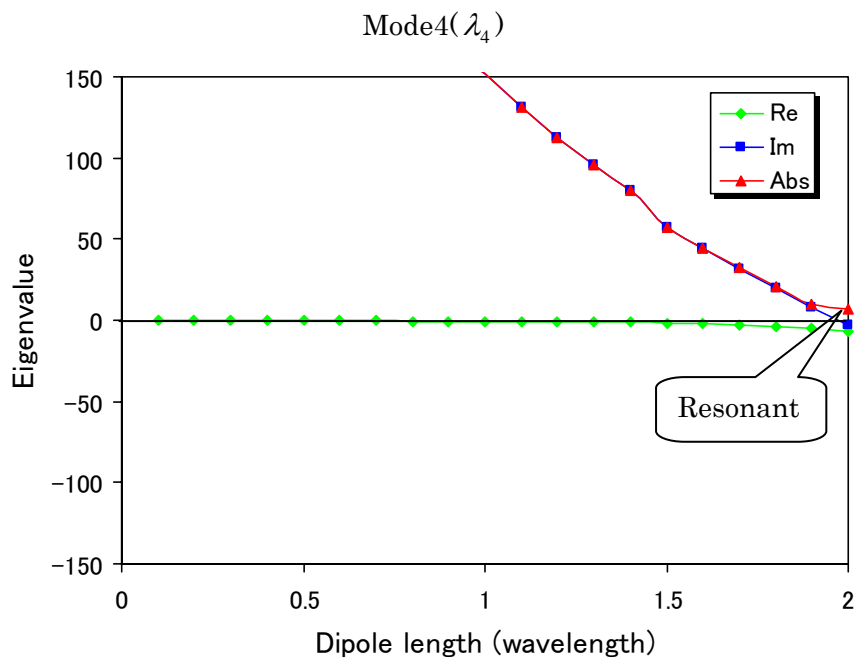
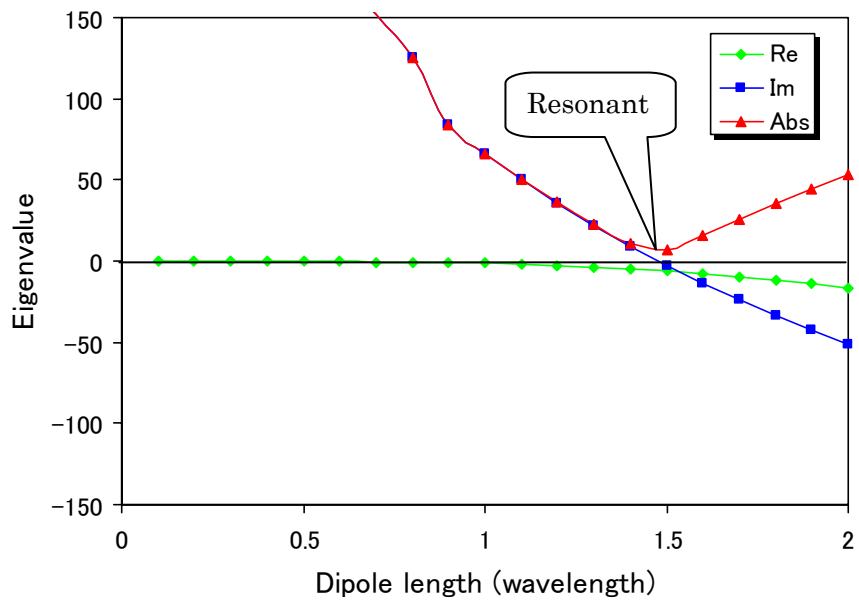


Mode4 の電流分布



3.3 各モードの固有値の周波数（あるいはダイポール長）による変化

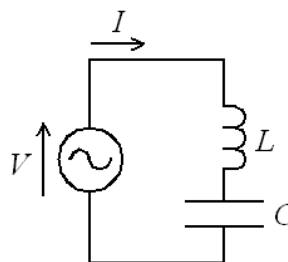
Mode3(λ_3)



4. 電気回路の共振回路の考察

2 節の説明と 3 節の例は電気のアテナの問題のみならず、行列の問題ならば全てに適用できる議論である。従って、これを良く理解すれば機械・建築・土木・航空・航空宇宙・音響・経済など他の分野の共振現象も簡単に理解することができる。数学の線形代数の行列理論に基づいて「共振とは何か?」ということを一様に説明したが、この一般の議論は電気回路の共振回路などで過去議論されていた他の問題も全て説明できる完全上位互換でなければ意味がない。そこで、この節では 2,3 節の議論が電気回路の共振回路にも適用できることを確認する。

4.1 LC 直列共振回路



$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$ZI = V$$

上の方程式は 2 節の説明では行列であったが、ここではスカラーになっただけである。共振条件は

$$ZI = 0$$

であり、上の方程式はスカラーなので、0 でない I に対して上の方程式が成り立つためには

$$Z = 0$$

でなければならない(この場合、 Z はスカラーなので $\det(Z) = Z$, 固有値= Z)。これを解くと

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

と共振周波数が求まる。この共振条件の求め方は 2 節に沿っており、その結果は過去の電気回路の共振回路で考察された事実と矛盾しない。

[時間表現での解法]

$$L \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t)$$

励振が無いとき、

$$L \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0$$

$$L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

$$\left[L \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{C} \right] i(t) = 0$$

左辺の演算子(operator) $L \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{C}$ を作用させて 0 になる 0 以外の $i(t)$ を求める (微分方程式の斉次方程式の解法)。

$$i(t) = e^{\lambda t}$$

とおいて、

$$\left(L\lambda^2 + \frac{1}{C} \right) e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = \pm \frac{j}{\sqrt{LC}}$$

よって、

$$i(t) = Ae^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}} + Be^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}} = C \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + D \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

行列という概念をより一般の演算子という概念に変えると、このように矛盾せず、共振という現象の一般化ができる。

4.2 RLC 直列共振回路

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$ZI = V$$

共振条件は

$$ZI = 0$$

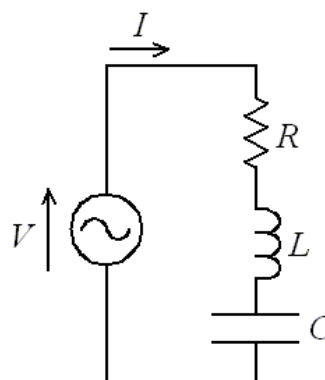
0 でない I に対して上の方程式が成り立つためには

$$Z = 0$$

でなければならない。しかし、これでは ω を実数の範囲で動かす場合には実部 R があるので、絶対に上の式が満たされることはない。そこで、共振という現象を広義の意味に拡張し、「 $|Z|$ が極小値を取るとき」あるいは「 $\text{Im}[Z] = X = 0$ 」のとき共振であるなどと定義するのである。この場合はどちらの広義の共振の定義を用いても

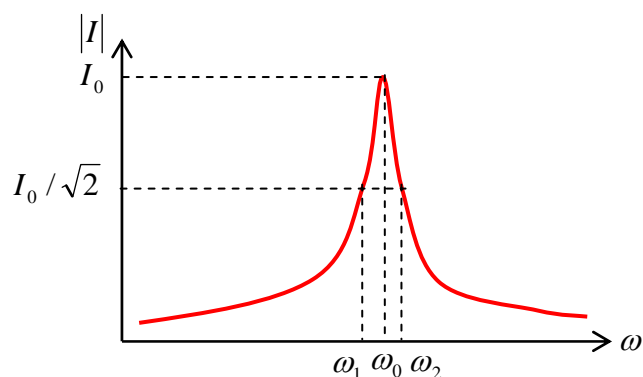
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

となり、共振周波数が求まる。そして、このように完全に $ZI = 0$ とならない場合には共振の鋭さ **Q ファクター(Quality Factor)** が定義される。



$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

$ZI = 0$ のときは $Q = \infty$ と考え、 Q が大きいほど抵抗成分が小さくて $ZI = 0$ に近い状態となり、損失の小さい良好な共振状態であると言える。



式(9)にこの Q の概念を取り入れることもできる。

振り子（ブランコ）の共振も微分方程式が同じ形になる[4]ので LCR 共振回路と同様に理解できる。

4.3 LC 並列共振回路

励振源が電流源の場合で、4.1 節で V, I が入れかわるだけである。

4.4 RLC 並列共振回路

励振源が電流源の場合で、4.2 節で V, I が入れかわるだけである。

5. まとめ

2 節では励振問題と固有値問題の関係について説明した。3 節では線状アンテナのモーメント法解析において固有モード基底関数の生成法について説明した。4 節では 2 節の内容が電気回路の共振回路の議論を拡張したものになっていることを確認した。数学の線形代数の行列理論に基づいて「共振とは何か？」ということを一様に説明した。行列表現された現象全てに適用できる議論なので、解析手法にも依らないところが美しいと思わないだろうか。

なお IEEE Xplore[5]で”mode<and>moment method”で検索して後から気づいたことだが、この議論とほとんど同じことは文献[6][7]で行われていた。閉じた構造物に対する電磁界のモーメント法解析で共振が起こった場合には数値的に様々な問題が起こるが、これらについて述べた文献[8][9]も興味深く、一読の価値がある。

参考文献(References)

- [1] R. F. Harrington: "Field Computation by Moment Methods", IEEE Press, New York, 1993
- [2] G. ストラング: "線形代数とその応用", 産業図書, 平成 4 年
- [3] <http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/hobby/edu/em/mom/mom2/index-j.html>
- [4] http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/lecture/electric_circuit/complex_calc_4/complex_3.pdf
- [5] <http://ieeexplore.ieee.org/>
- [6] R.F. Harrington and J.R. Mautz, "Theory of characteristic modes for conducting bodies," IEEE Trans. Antennas Propag., Vol.19, No.5, pp.622-628, Sep. 1971.
- [7] R.F. Harrington and J.R. Mautz, "Computation of characteristic modes for conducting bodies," IEEE Trans. Antennas Propag., Vol.19, No.5, pp.629-639, Sep. 1971.
- [8] J.R. Mautz and R.F. Harrington, "A Combined-Source Solution for Radiation and Scattering from a Perfectly Conducting Body," IEEE Trans. Antennas Propag., Vol.AP-27, No.4, pp.445-454, July 1979.
- [9] F.X. Canning, "Singular Value Decomposition of Integral Equations of EM and Applications to the Cavity Resonance Problem," IEEE Trans. Antennas Propag., Vol.37, No.9, pp.1156-1163, Sep. 1989.

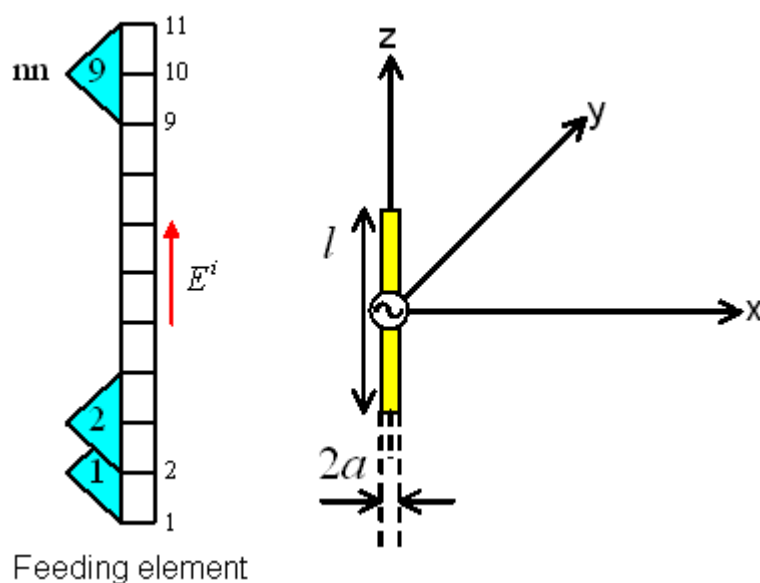
A. 付録

A.1 ダイポールの解析プログラム(Mathematica プログラム)

モーメント法によるダイポールアンテナの解析
(区分正弦ガラーキン法)

MoM Analysis for a Dipole Antenna
(Piecewise Sinusoidal Galerkin's Method)

2004/10/7 平野拓一 (Takuichi Hirano)



General Formula

$$\mathbf{A} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu \mathbf{i}(z') e^{-jk r}}{4 \pi r} dz' \quad (\text{Vector Potential})$$

$$G = \frac{e^{-jk r}}{4 \pi r} \quad (\text{Green's Function})$$

$$r = \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \quad (\text{Distance between Source Point and Observation Point})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \mu \epsilon \phi = 0 \quad (\text{Lorentz Condition})$$

$$\phi = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega \mu \epsilon}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - j\omega \mathbf{A} = \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} (\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A})$$

Dipole Antenna

$\mathbf{i} = \hat{z} i_z$ より

$$A_z = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu i_z(z') e^{-jkz}}{4\pi r} dz' = \int_{-l/2}^{l/2} \mu i_z(z') G dz'$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \right] i_z(z') dz'$$

$E_z + E_z^i = 0$ (on PEC)

$$\frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] i_z(z') dz' + E_z^i(z) = 0 \quad (\text{Pocklington's Integralequation})$$

シンプソンの公式で数値積分する関数を定義

```
ln[1]= simp1[f_, {ξ_, a_, b_}, n_] := Module[{h = (b - a) / (2 * n), x, i},
  x[i_] := a + h * i;
  
$$\frac{h}{3} \left( f /. \{\xi \rightarrow x[0]\} + 4 \sum_{i=1}^n (f /. \{\xi \rightarrow x[2 * i - 1]\}) + 2 \sum_{i=2}^n (f /. \{\xi \rightarrow x[2 * i - 2]\}) + (f /. \{\xi \rightarrow x[2 * n]\}) \right) // N
];$$

```

Parameters of Dipole Antenna

```
ln[2]= l = 0.5; (* アンテナ長 *)
a = 0.001; (* アンテナ半径 *)
volt = 1.; (* 励振電圧 *)
nn = 35; (* 分割数, unknown の数, デルタキャップ給電するから奇数のみ *)
Null
```

Analysis Start !


```

In[4]= <<Graphics`Colors`;
<<Graphics`Graphics`;
Module[{pos, r, r1, r2, r3, zz, vv, z, srcint, k, ii, curdist},
(* for Z matrix *)
k = 2 π; (* 波数 *)
pos[n_] := (1 / (nn + 1)) * n - 1 / 2; (* 位置 *)
r[zo_, zs_] := √(a² + (zo - zs)²); (* 観測点と波源との距離 *)
r1[n_, z_] := r[z, pos[n - 1]];
r2[n_, z_] := r[z, pos[n]];
r3[n_, z_] := r[z, pos[n + 1]];
srcint[n_, z_] := 
$$\frac{I_0}{\text{Sin}[k(\text{pos}[n] - \text{pos}[n - 1])]} \left( \frac{e^{-I k r2[n, z]}}{r2[n, z]} \text{Cos}[k(\text{pos}[n] - \text{pos}[n - 1])] - \frac{e^{-I k r1[n, z]}}{r1[n, z]} \right) +$$


$$\frac{I_0}{\text{Sin}[k(\text{pos}[n + 1] - \text{pos}[n])]} \left( \frac{e^{-I k r2[n, z]}}{r2[n, z]} \text{Cos}[k(\text{pos}[n + 1] - \text{pos}[n])] - \frac{e^{-I k r3[n, z]}}{r3[n, z]} \right);$$

zz[n_, n_] := simpI[
$$\frac{\text{Sin}[k(z - \text{pos}[m - 1])]}{\text{Sin}[k(\text{pos}[m] - \text{pos}[m - 1])]} \text{srcint}[n, z], \{z, \text{pos}[m - 1], \text{pos}[m], 10\} +$$

simpI[
$$\frac{\text{Sin}[k(\text{pos}[m + 1] - z)}{\text{Sin}[k(\text{pos}[m + 1] - \text{pos}[m])]} \text{srcint}[n, z], \{z, \text{pos}[m], \text{pos}[m + 1], 10\};$$

(* for V matrix *)
(* excite[z_] := If[-gap/2 < z < gap/2, volt/gap, 0];
weight[i_, z_] := If[pos[i - 1] ≤ z ≤ pos[i], 
$$\frac{\text{Sin}[k(\text{pos}[i] - z)}{\text{Sin}[k(\text{pos}[i] - \text{pos}[i - 1])]} \frac{\text{Sin}[k(\text{pos}[i + 1] - z)}{\text{Sin}[k(\text{pos}[i + 1] - \text{pos}[i])]}];$$

vv[i_] := simpI[weight[i, z] excite[z], {z, pos[i - 1], pos[i + 1], 10}, *];
vv[i_] := If[i == (nn + 1) / 2, -volt, 0]; (* デルタギャップ給電 *)
(* Plot[excite[z], {z, -gap, gap}]; *) (* 励振関数のグラフ *)
(* Plot[weight[1, z], {z, pos[0], pos[2]}]; *) (* 重み関数のグラフ *)
Print["***** Now Making Z Matrix... *****"];
zmat = Table[zz[i, j], {i, 1, nn}, {j, 1, nn}];

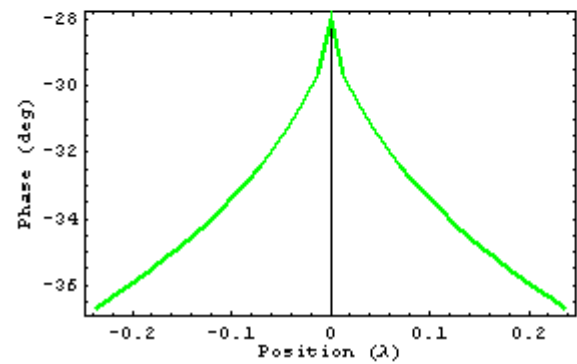
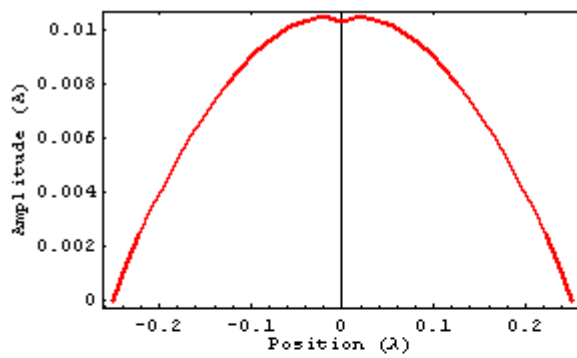
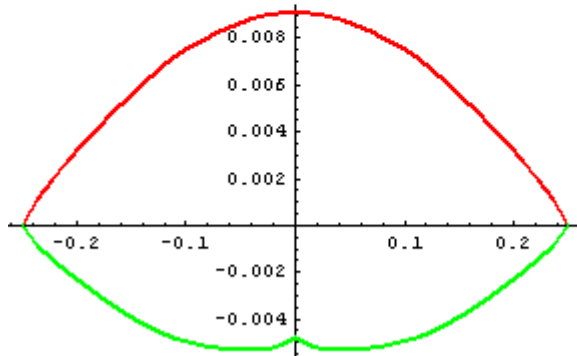
Print["***** Now Making V Matrix... *****"];
vmat = Table[vv[i], {i, 1, nn}];
inat = Table[ii[i], {i, 1, nn}];
Print["***** Now Solving Linear Equations... *****"];
inat = inat /. Solve[zmat.inat == vmat, inat];
curdist = Table[{pos[i], inat[[1]][[i]]}, {i, 1, nn}];
curdist = Prepend[curdist, {-1 / 2, 0}]; (* アンテナの端では電流は0 *)
curdist = Append[curdist, {1 / 2, 0}]; (* アンテナの端では電流は0 *)

Print["Current: ", inat[[1, Round[nn / 2]]]; (* 給電点電流 *)
Print["Input Impedance: ", volt / inat[[1, Round[nn / 2]]]; (* 入力インピーダンス *)
Print["Input Admittance: ", inat[[1, Round[nn / 2]]] / volt]; (* 入力アドミタンス *)
Module[{curre, curin},
curre = ListPlot[MapAt[Re, curdist, Table[{i, 2}, {i, 1, nn + 2}]],
PlotJoined → True,
PlotStyle → {Red, AbsoluteThickness[2]},
DisplayFunction → Identity];
curin = ListPlot[MapAt[Im, curdist, Table[{i, 2}, {i, 1, nn + 2}]], PlotJoined → True,
PlotStyle → {Green, AbsoluteThickness[2]},
DisplayFunction → Identity];
Show[{curre, curin}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
];
Module[{},
curamp = ListPlot[MapAt[Abs, curdist, Table[{i, 2}, {i, 1, nn + 2}]],
PlotJoined → True,
PlotStyle → {Red, AbsoluteThickness[2]},
Frame → True,
FrameLabel → {"Position (λ)", "Amplitude (A)"},
DisplayFunction → Identity];
curpha =
ListPlot[Take[MapAt[If[Abs[#] > 10-5, ArcTan[Re[#], Im[#]] * (180 / π)] &, curdist, Table[{i, 2}, {i, 2, nn + 1}]],
{2, Length[curdist] - 1}],
PlotJoined → True,
PlotStyle → {Green, AbsoluteThickness[2]},
Frame → True,
FrameLabel → {"Position (λ)", "Phase (deg)"},
DisplayFunction → Identity];
Show[{curamp}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
Show[{curpha}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
];
]

```



```
***** Now Making Z Matrix... *****  
***** Now Making V Matrix... *****  
***** Now Solving Linear Equations... *****  
Current: 0.00909347 - 0.00483173 i  
Input Impedance: 85.7576 + 45.5665 i  
Input Admittance: 0.00909347 - 0.00483173 i
```

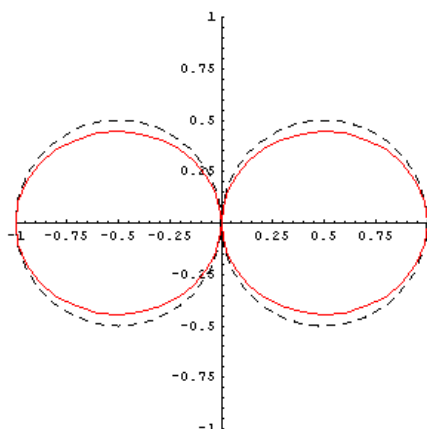


振幅と位相のリスト

```
In[7]= cur = Table[{Abs[imat[[1, i]]], Arg[imat[[1, i]]]}, {i, 1, Length[imat[[1]]]}]
Out[7]= {{0.00139803, -0.640401}, {0.00242129, -0.635278}, {0.00339366, -0.630288},
{0.0043055, -0.625159}, {0.00516372, -0.619853}, {0.00596779, -0.614327}, {0.00671561, -0.608541},
{0.00740424, -0.602448}, {0.0080304, -0.595996}, {0.0085908, -0.589121}, {0.00908222, -0.581746},
{0.00950166, -0.57377}, {0.00984639, -0.565063}, {0.0101138, -0.55544}, {0.0103016, -0.544637},
{0.0104063, -0.532077}, {0.0104294, -0.517853}, {0.0102974, -0.488405}, {0.0104294, -0.517853},
{0.0104063, -0.532077}, {0.0103016, -0.544637}, {0.0101138, -0.55544}, {0.00984639, -0.565063},
{0.00950166, -0.57377}, {0.00908222, -0.581746}, {0.0085908, -0.589121}, {0.0080304, -0.595996},
{0.00740424, -0.602448}, {0.00671561, -0.608541}, {0.00596779, -0.614327}, {0.00516372, -0.619853},
{0.0043055, -0.625159}, {0.00339366, -0.630288}, {0.00242129, -0.635278}, {0.00139803, -0.640401}}
```

指向性を求める

```
In[8]= k = 2 * π;
pos[n_] := (1 / (n + 1)) * n - 1 / 2;
eθ[θ_] := Sin[θ] * Sum[cur[[i, 1]] * Exp[I * cur[[i, 2]]] * Exp[I * k * pos[i + 1]] * Cos[θ], {i, 1, Length[cur]}];
rot[θ_] := {Cos[θ] -Sin[θ];
Sin[θ] Cos[θ]};
scale[sx_, sy_] := {sx 0;
0 sy};
eθlist = Table[Abs[eθ[θ]] * (scale[-1, 1].rot[90°]).{Cos[θ], Sin[θ]}, {θ, -π, π, 2π/60}];
elemmax = Max[Map[√#[[1]]^2 + #[[2]]^2 &, eθlist]];
eθlist = eθlist / elemmax;
eθgraphics = {RGBColor[1, 0, 0], Line[eθlist]};
ParametricPlot[Abs[Sin[θ]] * (scale[-1, 1].rot[90°]).{Cos[θ], Sin[θ]}, {θ, -π, π},
PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}},
AxesStyle -> {RGBColor[0.01, 0.01, 0.01]},
PlotStyle -> {RGBColor[0.01, 0.01, 0.01], Dashing[{0.02, 0.02]}],
AspectRatio -> Automatic,
Epilog -> eθgraphics];
```



行列要素確認

```
In[18]= << Graphics`Legend`;
```

```
a = zmat;
```

```
colfun[x_] := Hue[-0.7 * (x - 1), 1, 1];
```

```
ShowLegend[
```

```
ListDensityPlot[Abs[Reverse[a]],
```

```
FrameTicks -> {None, Table[{i, Length[a] - i}, {i, Length[a], 0, -Max[1, IntegerPart[Length[a] / 5]}]},
```

```
Table[{i, 0, Length[a], Max[1, IntegerPart[Length[a][[1]] / 5]}], None},
```

```
Mesh -> False,
```

```
ColorFunction -> colfun,
```

```
PlotRange -> {0, Max[Abs[a]]},
```

```
PlotLabel -> "Magnitude of Matrix Elements",
```

```
DisplayFunction -> Identity],
```

```
{(colfun[1 - #]) &, 16, ToString[Round[Max[Abs[a]]], "0", LegendSize -> {0.4, 1.},
```

```
LegendPosition -> {1.1, -.4}, LegendLabel -> " "}
```

```
];
```

```
colfun2[x_] := RGBColor[0, 3 * x, 1] /; (x <= 1 / 3);
```

```
colfun2[x_] := RGBColor[3 * (x - 1 / 3), 1, 1] /; (1 / 3 < x <= 2 / 3);
```

```
colfun2[x_] := RGBColor[-3 * (x - 2 / 3) + 1, -3 * (x - 2 / 3) + 1, 1] /; (2 / 3 < x); ShowLegend[
```

```
ListDensityPlot[Map[{If[Abs[#] < 10-9, 0, Arg[#] *  $\frac{180}{\pi}$ ] &}, Reverse[a], {2}],
```

```
FrameTicks -> {None, Table[{i, Length[a] - i}, {i, Length[a], 0, -Max[1, IntegerPart[Length[a] / 5]}]},
```

```
Table[{i, 0, Length[a], Max[1, IntegerPart[Length[a][[1]] / 5]}], None},
```

```
Mesh -> False,
```

```
ColorFunction -> colfun2,
```

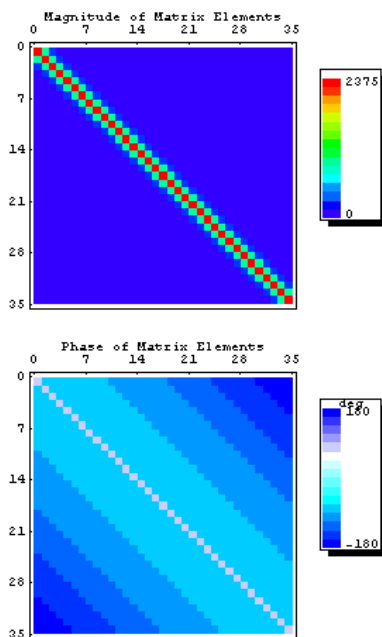
```
PlotRange -> {-180, 180},
```

```
PlotLabel -> "Phase of Matrix Elements",
```

```
DisplayFunction -> Identity],
```

```
{(colfun2[1 - #]) &, 16, "180", "-180", LegendSize -> {0.4, 1.}, LegendPosition -> {1.1, -.4}, LegendLabel -> "deg"}
```

```
];
```



固有値問題

$$[Z]\{V\} = \{V\}$$

$$[Y]\{V\} = \{0\}$$

Resonance: $[Z]\{0\} = 0$

$$[Z]\{1\} = \lambda\{1\}$$

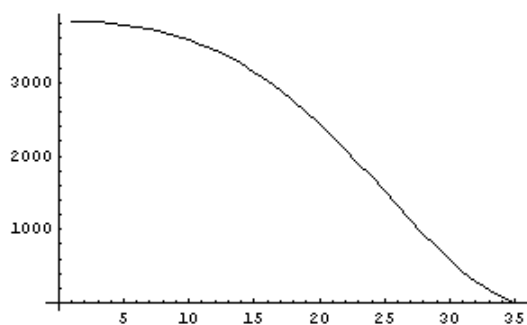
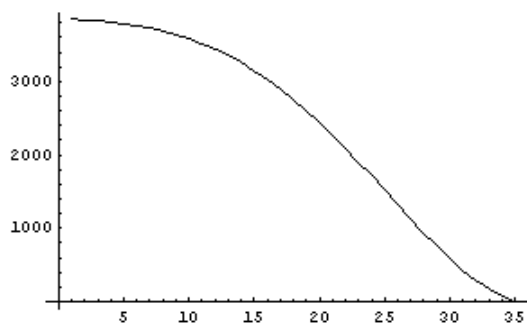
Eigensystem

では、固有値は数値的な場合は、絶対値が大きなものから小さなものへの順に並べられる

```

In[38]:= eigsys = Eigensystem[zmat];
evecLis = eigsys[[2]];
evalLis = eigsys[[1]];
CurModeFunc[i_] := evecLis[[i]] // Chop;
CurEigVal[i_] := evalLis[[i]] // Chop;
ListPlot[Abs[evalLis],
  PlotJoined -> True];
ListPlot[Im[evalLis],
  PlotJoined -> True];

```

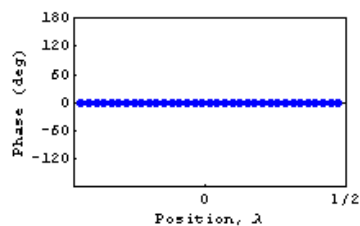
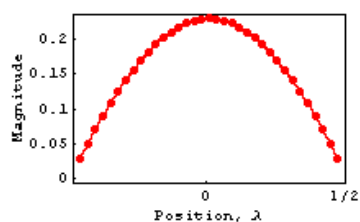


```

i = nn;

g1 = ListPlot[Abs[CurModeFunc[i]],
  PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2], RGBColor[1, 0, 0]},
  PlotJoined -> True,
  PlotRange -> {0, Automatic},
  DisplayFunction -> Identity];
g2 = ListPlot[Arg[CurModeFunc[i]] * (180. /  $\pi$ ),
  PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2], RGBColor[0, 0, 1]},
  PlotJoined -> True,
  PlotRange -> {-180., 180.},
  DisplayFunction -> Identity];
g3 = ListPlot[Abs[CurModeFunc[i]],
  PlotStyle -> {AbsolutePointSize[5], RGBColor[1, 0, 0]},
  PlotRange -> {0, Automatic},
  DisplayFunction -> Identity];
g4 = ListPlot[Arg[CurModeFunc[i]] * (180. /  $\pi$ ),
  PlotStyle -> {AbsolutePointSize[5], RGBColor[0, 0, 1]},
  PlotRange -> {-180., 180.},
  DisplayFunction -> Identity];
g5 = Show[{g1, g3},
  Frame -> True,
  PlotRange -> {{0, nn + 1}, Automatic},
  FrameLabel -> {"Position,  $\lambda$ ", "Magnitude", "", ""},
  FrameTicks -> {{{0, "-1/2"}, {nn/2, "0"}, {nn + 1, "1/2"}}, Automatic, {}, {}}];
g6 = Show[{g2, g4},
  Frame -> True,
  PlotRange -> {{0, nn + 1}, {-180., 180.}},
  FrameLabel -> {"Position,  $\lambda$ ", "Phase (deg)", "", ""},
  FrameTicks -> {{{0, "-1/2"}, {nn/2, "0"}, {nn + 1, "1/2"}}, Table[ang, {ang, -180, 180, 60}], {}, {}}];
Show[GraphicsArray[{g5, g6}],
  ImageSize -> {480, 160},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]
CurEigVal[i]

```



Out[52]= - GraphicsArray -

Out[53]= -4.16168 - 2.66556 i

A.2 励振を止めたときのモードの減衰（まだ途中。考察不足。間違いあり。解けた方は教えてください）

証明 2)

$t < 0$ のときに励振されていた固有値 λ のモード $[I]_\lambda$ が励振を $t = 0$ で止めて各ポートを開放したら、各モードの電流分布はどのように減衰するか考察する。励振をやめ、励振ポートを開放した瞬間、励振ポートには電流が流れなくなるが、間隙（ギャップ）が狭いのでコンデンサのように振舞うと仮定すると、各ポートの電圧を表現する電圧ベクトルは次のようになる。

$$[V] = [C^{-1}][Q] = [C^{-1}] \frac{d}{dt}[I] \quad (\text{複素表現と時間表現を混ぜているからダメ！考察不足})$$

だから、これ以降は信頼できない！)

ここで、 $[C^{-1}]$ は各ポートの間隙容量の逆数を表現する行列である。これを式(1)に代入すると、

$$[Z][I] = [C^{-1}] \frac{d}{dt}[I]$$

$$\frac{d}{dt}[I] = ([C][Z])[I]$$

今、簡単のために MoM 解析の分割を小さくし、全てのポートの間隙容量は等しく、 $[C] = I$ (単位行列) とすると、

$$\frac{d}{dt}[I] = [Z][I] \quad (12)$$

という連立微分方程式を解く問題となる。これは、行列の対角化の理論を用いると簡単に解くことができる[2](pp.226-233)。 $[Z]$ 行列を対角化してみよう。列固有ベクトルを並べた行列 S と固有値が対角要素の対角行列 Λ を用いて次のように分解（対角化）できる。

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ Z & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & & | \end{bmatrix}^{-1} \quad (13)$$

これを式(12)に代入すると、

$$\frac{d}{dt}[J] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} [J] \quad (14)$$

ここで、

$$[J] = S^{-1}[I] \quad (15)$$

である。さて、式(14)は成分(行)毎に独立しているので、簡単に解くことができる。

$$[J] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

よって、式(15)より、

$$[I] = S[J] = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_1 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{u}_n \\ | \end{bmatrix}$$

固有値の実部 $\text{Re}[\lambda_i] = \text{Re}[\alpha_i + j\beta_i] = \alpha_i$ は線状アンテナのモーメント法解析[1][3]では負になることは確認した。したがって、 $|\alpha_i|$ が小さなモードほど時間が経つにつれてゆっくり減衰する。完全な共振モードでは $\alpha_i = 0$ で時間が経っても減衰しない。