

モーメント法(Method of Moments, Moment Method)入門 2

2002/4 平野拓一

2 線状アンテナの解析

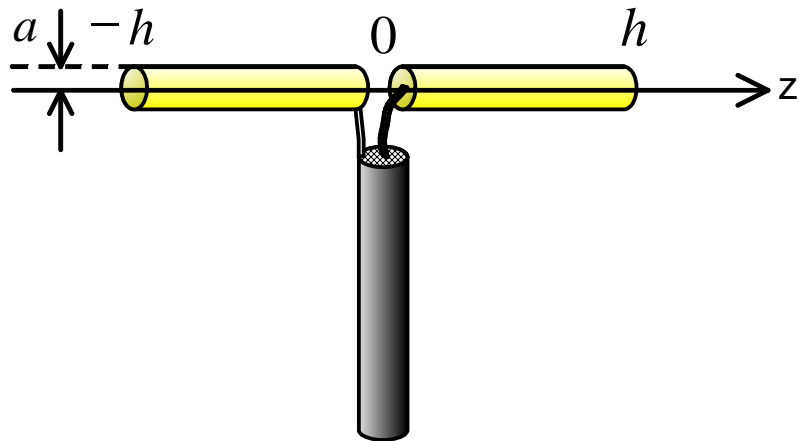


図 1 ダイポールアンテナ

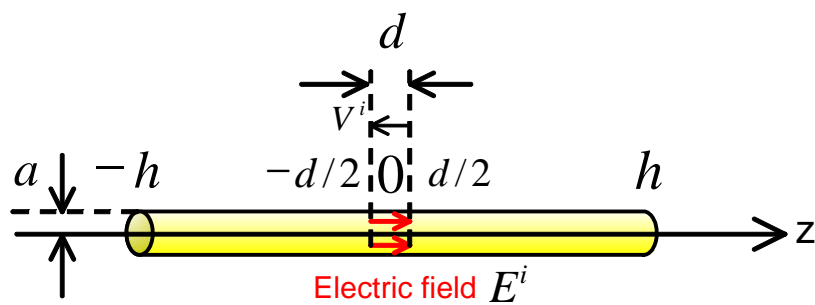


図 2 デルタギャップ給電モデル

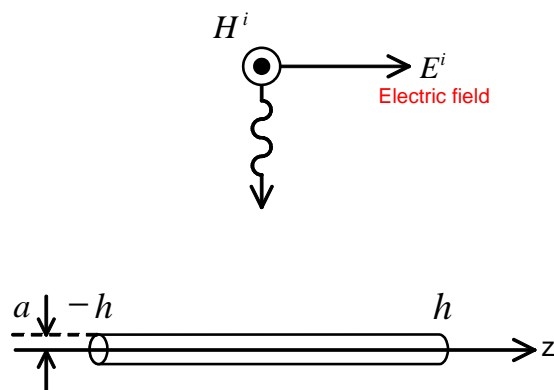


図 3 導体棒による散乱問題

図 1 に示すように自由空間中にダイポールアンテナが置かれている。 $z=0$ の点が給電点である。給電点には普通同軸ケーブルが繋がれて励振されるが、モーメント法解析では給電構造も含めた解析を行うのは複雑である。そこで、給電点で励振される電磁界の特徴を取り出して、給電点の微小な区間で電界が印加する図 2 に示すようなデルタギャップ給電モデルがよく使われる。デルタギャップ給電モデルはアンテナの放射問題を扱うが、印加する電界を導体棒全体に与えれば図 3 に示すような導体棒による電磁波の散乱問題を扱うこともできる。

これからの問題は図 2 のように導体棒に対して電界を印加したときに、導体棒上にはどのような電流が流れるかを求めることに集中する。アンテナ上の電流が求めれば、その電流から放射される電磁界を計算することにより、簡単に指向性が得られる。また、図 2 ではある一定の長さの区間 d に対して電圧 V^i を与え、一定の電界 $E^i = V^i / d$ を与えている。問題を解いて電流を求めたら $z = \pm d/2$ の電流からアンテナの入力インピーダンスも計算することができる。

境界条件の適用 方程式の導出

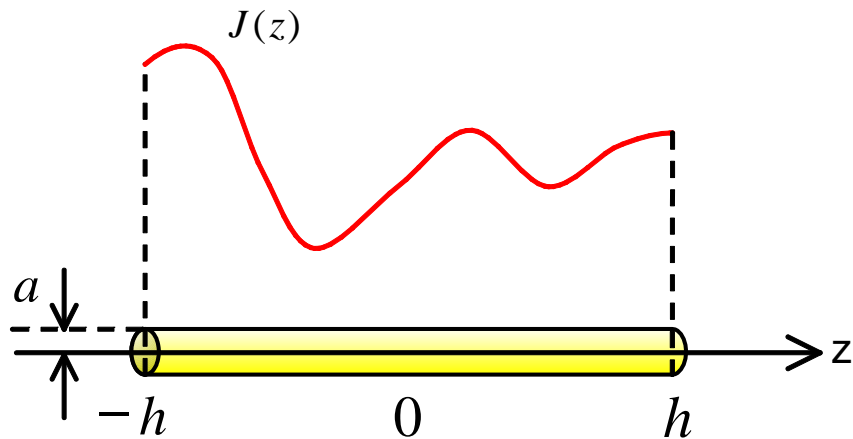


図 4 未知電流分布

まず、図 4 に示すようにアンテナ上に未知の電流分布 $J(z)$ を仮定する。

ここで、アンテナの半径 a は波長に比べて十分小さいと仮定する。すると電流は z 軸に沿って流れる。実際にはアンテナが完全導体(PEC)だとすると表面全体に電流が流れるが、電流を z 軸に沿った線電流と仮定してもよい理由は付録 A.1 に示す。

電流によって作られるベクトルポテンシャルを計算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \iiint_V \frac{\mu_0 \mathbf{i} \exp(-jk_0 |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|)}{4\pi |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} dV_s \\ &= \int_{z_s=-h}^h \frac{\mu_0 \hat{z} J(z_s) \exp(-jk_0 |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|)}{4\pi |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} dz_s \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 k_0 は自由空間の波数である。よって、

$$A_z = \int_{z_s=-h}^h \frac{\mu_0 J(z_s) \exp(-jk_0 |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|)}{4\pi |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} dz_s \quad (2)$$

となりベクトルポテンシャルは z 成分しか持たない。
ここで記述が簡易になるように次の関数を定義する。

ψ とその性質

$$\psi(z_o, z_s) = \frac{\exp(-jk_0 r)}{r}$$

$$r = |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s| = \sqrt{a^2 + (z_o - z_s)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_o} \psi(z_o, z_s) = -\frac{\partial}{\partial z_s} \psi(z_o, z_s)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \psi(z_o, z_s) = \frac{\partial^2}{\partial z_s^2} \psi(z_o, z_s)$$

すると式(2)は次のように書ける。

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z_s=-h}^h J(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s \quad (3)$$

次に、後で導体棒上で電界の接線成分が0になるという境界条件を課すことを考慮して、ベクトルポテンシャルを用いて電流から放射される電界の z 成分を求める。 A は z 成分しか持たないことを考慮すると

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega \hat{z} A_z + \frac{\nabla_o \nabla_o \cdot (\hat{z} A_z)}{j\omega \mu_0 \epsilon_0} \\ &= -j\omega \hat{z} A_z + \frac{\nabla_o}{j\omega \mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial A_z}{\partial z_o} \end{aligned} \quad (4)$$

今着目しているのは \mathbf{E} の z 成分 E_z だけなので、 E_z を計算すると

$$\begin{aligned} E_z &= -j\omega A_z + \frac{1}{j\omega \mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z_o^2} = -j\omega \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \right) A_z \\ &= \frac{-jk_0 \eta_0}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \right) \int_{z_s=-h}^h J(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、

$$\omega \mu_0 = \frac{k_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \mu_0 = k_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = k_0 \eta_0$$

を用いた。次に、完全導体上で電界の接線成分は0なので、

$$E_z + E_z^i = 0 \quad (\text{On the surface of the wire}) \tag{6}$$

が成り立つ。ここで、 E_z^i は入射界であり、図 2 では印加電界に相当する。式(5)を式(6)に代入すると、

$$\frac{-jk_0\eta_0}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \right) \int_{z_s=-h}^h J(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s = -E_z^i(z_o) \tag{7}$$

離散化

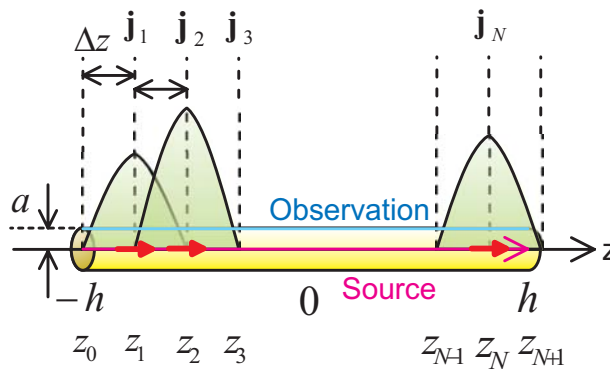


図 5 区分正弦関数で展開

ここで、導体棒は波長に比して十分細いとしているので、図 5 に示されるように電流は中心軸上を流れるとする。観測点は導体表面に置く。そして式(7)の電流 J を図のように区分正弦(Piecewise sinusoid)関数で展開する。上の例では幅 Δz で一定に分割している。 $z_i \leq z \leq z_{i+1}$ の各区間をセグメント(Segment)と言う。図では z 軸に沿って流れる電流の振幅が山形の区分正弦関数で表されている。線形の三角形関数でなく、あえて一見複雑そうに見える区分正弦関数を使うのは後で式(15),式(16)のあたりで述べるように解析的に積分できるからである。

$$J(z) = \sum_{n=1}^N a_n j_n(z) \tag{8}$$

$$j_n(z) = \begin{cases} \frac{\sin\{k_0(z - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} & (z_{n-1} < z < z_n) \\ \frac{\sin\{k_0(z_{n+1} - z)\}}{\sin\{k_0(z_{n+1} - z_n)\}} & (z_n < z < z_{n+1}) \\ 0 & (\text{elsewhere}) \end{cases} \tag{9}$$

端では電流が0になるという端部条件を考慮して図のように端部で電流が0になるように基底関

数を置いている（端部に蓄積電荷があるとすれば、**電流連続の式**から電流は端部で0でなくても構わないが、実際に端部の蓄積電荷も考慮して解いてみると端部では電流が0となる）。

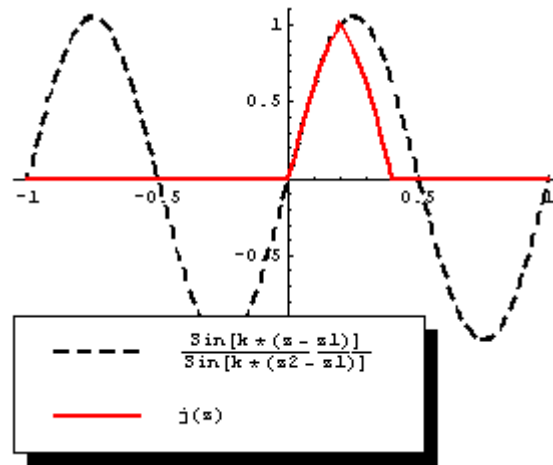


図 6 区分正弦基底関数

図 6 に式(9)の基底関数の一例を示す。このように正弦波の一部を基底関数に使っている。モーメント法ではセグメントの数を 1 波長に比して十分短くするので、区分正弦を使った場合でもほとんど線形関数と同じになる。

式(8)を式(7)に代入すると

$$\frac{-jk_0\eta_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N a_n \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \right) \int_{z_s=-h}^h j_n(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s = -E_z^i(z_o)$$

$$\frac{-jk_0\eta_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N a_n \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \right) \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_{n+1}} j_n(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s = -E_z^i(z_o)$$

ガラーキン法の適用

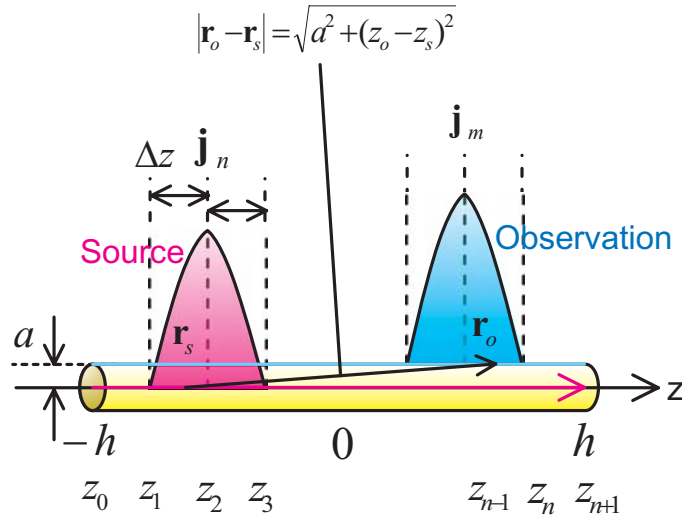


図 7 波源と観測点の基底関数のリアクション

ここで、ガラーキン法を適用する。波源と観測点の関係は図 7 に示す。

$$\begin{aligned} & \frac{-jk_0\eta_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N a_n \int_{z_0=z_{m-1}}^{z_{m+1}} j_m(z_o) \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \right) \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_{n+1}} j_n(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s dz_o \\ & = - \int_{z_0=z_{m-1}}^{z_{m+1}} j_m(z_o) E_z^i(z_o) dz_o \end{aligned} \quad (10)$$

整理すると、

$$[Z_{mn}] [a_n] = [V_m] \quad (11)$$

ここで、

$$Z_{mn} = \int_{z_0=z_{m-1}}^{z_{m+1}} j_m(z_o) E_n(z_o) dz_o \quad (12)$$

$$E_n(z_o) = \frac{-jk_0\eta_0}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \right) \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_{n+1}} j_n(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s \quad (13)$$

$$V_m = - \int_{z_0=z_{m-1}}^{z_{m+1}} j_m(z_o) E_z^i(z_o) dz_o \quad (14)$$

ここで、式(13)に観測座標による微分が入っており、そのまま $\psi(z_o, z_s)$ に微分演算を適用してしまると式が煩雑になって積分できなくなり、2重積分が残ってしまう。そこで、次のように計算を簡単化する工夫をする。上式の下単線部()の計算だけを行う。 j_n は内部に微分不可能な特異点を持つため、積分区間を分ける。 $z_{n-1} < z < z_n$ については

$$\frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} j_n(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s$$

$$= \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} j_n(z_s) \frac{\partial^2 \psi(z_o, z_s)}{\partial z_o^2} dz_s = \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} j_n(z_s) \frac{\partial^2 \psi(z_o, z_s)}{\partial z_s^2} dz_s$$

部分積分して

$$= \left[j_n(z_s) \frac{\partial \psi(z_o, z_s)}{\partial z_s} \right]_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} - \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} \frac{\partial j_n(z_s)}{\partial z_s} \frac{\partial \psi(z_o, z_s)}{\partial z_s} dz_s$$

もう一度部分積分して

$$= \left[j_n(z_s) \frac{\partial \psi(z_o, z_s)}{\partial z_s} - \frac{\partial j_n(z_s)}{\partial z_s} \psi(z_o, z_s) \right]_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} + \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} \frac{\partial^2 j_n(z_s)}{\partial z_s^2} \psi(z_o, z_s) dz_s$$

よって式(13)の下二重線()の部分($z_{n-1} < z < z_n$)は

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \right) \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} j_n(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s \\ &= \frac{1}{k_0^2} \left[j_n(z_s) \frac{\partial \psi(z_o, z_s)}{\partial z_s} - \frac{\partial j_n(z_s)}{\partial z_s} \psi(z_o, z_s) \right]_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} \\ & \quad + \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} \left\{ j_n(z_s) + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 j_n(z_s)}{\partial z_s^2} \right\} \psi(z_o, z_s) dz_s \end{aligned}$$

(上式の下線部に式(9)を代入すると0になる)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k_0^2} \left[j_n(z_s) \frac{\partial \psi(z_o, z_s)}{\partial z_s} - \frac{\partial j_n(z_s)}{\partial z_s} \psi(z_o, z_s) \right]_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} \\ &= \frac{1}{k_0^2} \left[\frac{\sin\{k_0(z_s - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \frac{\partial \psi(z_o, z_s)}{\partial z_s} - k \frac{\cos\{k_0(z_s - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \psi(z_o, z_s) \right]_{z_s=z_{n-1}}^{z_n} \\ &= \frac{1}{k_0^2} \left[\frac{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \frac{\partial \psi(z_o, z_n)}{\partial z_s} - \frac{\sin\{k_0(z_{n-1} - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \frac{\partial \psi(z_o, z_{n-1})}{\partial z_s} \right. \\ & \quad \left. - k_0 \frac{\cos\{k_0(z_n - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \psi(z_o, z_n) + k_0 \frac{\cos\{k_0(z_{n-1} - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \psi(z_o, z_{n-1}) \right] \\ &= \frac{1}{k_0^2} \left[\frac{\partial \psi(z_o, z_n)}{\partial z_s} - k_0 \frac{\cos\{k_0(z_n - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \psi(z_o, z_n) + k_0 \frac{1}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \psi(z_o, z_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

(15)

同様に、式(13)の下二重線の部分($z_n \leq z \leq z_{n+1}$)は

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_o^2} \right) \int_{z_s=z_n}^{z_{n+1}} j_n(z_s) \psi(z_o, z_s) dz_s \\
&= \frac{1}{k_0^2} \left[j_n(z_s) \frac{\partial \psi(z_o, z_s)}{\partial z_s} - \frac{\partial j_n(z_s)}{\partial z_s} \psi(z_o, z_s) \right]_{z_s=z_n}^{z_{n+1}} \\
&= \frac{1}{k_0^2} \left[\frac{\sin\{k_0(z_{n+1}-z)\}}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \frac{\partial \psi(z_o, z_s)}{\partial z_s} + k_0 \frac{\cos\{k_0(z_{n+1}-z)\}}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \psi(z_o, z_s) \right]_{z_s=z_n}^{z_{n+1}} \\
&= \frac{1}{k_0^2} \left[\frac{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_{n+1})\}}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \frac{\partial \psi(z_o, z_{n+1})}{\partial z_s} - \frac{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \frac{\partial \psi(z_o, z_n)}{\partial z_s} \right. \\
&\quad \left. + k_0 \frac{\cos\{k_0(z_{n+1}-z_{n+1})\}}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \psi(z_o, z_{n+1}) - k_0 \frac{\cos\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \psi(z_o, z_n) \right] \\
&= \frac{1}{k_0^2} \left[-\frac{\partial \psi(z_o, z_n)}{\partial z_s} + k_0 \frac{1}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \psi(z_o, z_{n+1}) - k_0 \frac{\cos\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \psi(z_o, z_n) \right] \\
(16)
\end{aligned}$$

よって、式(15)+式(16)より、式(13)の下二重線の部分は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k_0^2} \left[-k_0 \frac{\cos\{k_0(z_n-z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n-z_{n-1})\}} \psi(z_o, z_n) + k_0 \frac{1}{\sin\{k_0(z_n-z_{n-1})\}} \psi(z_o, z_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. + k_0 \frac{1}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \psi(z_o, z_{n+1}) - k_0 \frac{\cos\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \psi(z_o, z_n) \right] \\
&= \frac{1}{k_0} \left[\frac{1}{\sin\{k_0(z_n-z_{n-1})\}} \{ \psi(z_o, z_{n-1}) - \cos(k_0(z_n-z_{n-1})) \psi(z_o, z_n) \} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \{ \psi(z_o, z_{n+1}) - \cos(k_0(z_{n+1}-z_n)) \psi(z_o, z_n) \} \right]
\end{aligned}$$

よって、上式を式(13)に代入すると

$$\begin{aligned}
E_n(z_o) &= \frac{-j\eta_0}{4\pi} \left[\frac{1}{\sin\{k_0(z_n-z_{n-1})\}} \{ \psi(z_o, z_{n-1}) - \cos(k_0(z_n-z_{n-1})) \psi(z_o, z_n) \} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \{ \psi(z_o, z_{n+1}) - \cos(k_0(z_{n+1}-z_n)) \psi(z_o, z_n) \} \right] \\
&= j30 \left[\frac{1}{\sin\{k_0(z_n-z_{n-1})\}} \{ \cos(k_0(z_n-z_{n-1})) \psi(z_o, z_n) - \psi(z_o, z_{n-1}) \} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sin\{k_0(z_{n+1}-z_n)\}} \{ \cos(k_0(z_{n+1}-z_n)) \psi(z_o, z_n) - \psi(z_o, z_{n+1}) \} \right]
\end{aligned}$$

このようにして、区分正弦関数を用いると式(10)の左辺の二重積分を一変数の積分にすることができる。

式(14)の右辺の励振ベクトルの計算では、普通中心の1または2セグメントに対して図2のように電界を与える。中心の1セグメントだけに電界を与えた場合、右辺の励振ベクトルは真中の2つだけが値を持ち、2セグメントだけに電界を与えた場合、励振ベクトルは真中の3つだけが値を持つ。ただし、分割数をあまり増やすと図2のデルタギャップの間隙 d が小さくなりすぎ、間隙容量[2]によって入力インピーダンスが正確に求まらなくなる。普通セグメント長が $1/20$ 波長ぐらいならば問題ない。

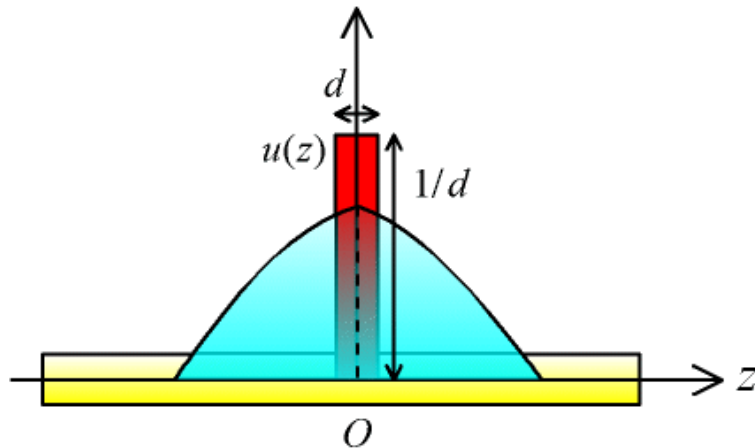


図8 デルタギャップ給電

しかし、まだ問題がある。普通、励振間隙の幅は図8に示すようにモーメント法のセグメントに比しても遥かに小さい。ここで、

$$u(z) = \begin{cases} 1/d & (|z| \leq d/2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義されるので、ギャップ間の印加電圧を V^i とすると

$$E_z^i = V^i u(z)$$

と表すことができる。ここで、ギャップ間では電界は一定であると仮定した。

ギャップ間隔が非常に小さいので、式(14)をプログラムコードでそのままインプリメントした場合、 E_z^i を見逃して、数値的に不安定となる。被積分関数がこのように急峻に変化するときは数値積分法としてシンプソンの公式やガウス・ルジャンドル則などの滑らかな関数で補間する方法よりも台形公式を使う方が好ましい。しかし、台形公式を使ってもギャップ間隔は積分区間よりも遥かに小さいのでまだ数値的に不安定である。そこで、積分区間はセグメント区間にせず、プログラムコードは多少複雑になるが、ギャップ区間で積分するようにする。

しかし、もしもそこまでギャップ間隔が小さいならば、式(14)を近似的に次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
V_m &= -\int_{z_o=z_{m-1}}^{z_{m+1}} j_m(z_o) E_z^i dz_o = -\int_{z_o=z_{m-1}}^{z_{m+1}} j_m(z_o) V^i u(z_o) dz_o \\
&= -V^i \int_{z_o=z_{m-1}}^{z_{m+1}} j_m(z_o) u(z_o) dz_o \approx -V^i \int_{z_o=z_{m-1}}^{z_{m+1}} j_m(z_o) \delta(z_o) dz_o = -V^i
\end{aligned}$$

ここで、 $u(z)$ の面積は常に 1 だから間隔を狭くするとデルタ関数となるからである。このような無限小のギャップをデルタギャップと言う。上の式変形では基底関数 m の頂点の部分にギャップがある場合、つまり、アンテナ上の基底関数の数が奇数のときである。

以上をもう一度まとめると、

$$[Z_{mn}][a_n] = [V_m] \quad (17)$$

ここで、

$$Z_{mn} = \int_{z_o=z_{m-1}}^{z_m} \frac{\sin\{k_0(z_o - z_{m-1})\}}{\sin\{k_0(z_m - z_{m-1})\}} E_n(z_o) dz_o + \int_{z_o=z_m}^{z_{m+1}} \frac{\sin\{k_0(z_{m+1} - z_o)\}}{\sin\{k_0(z_{m+1} - z_m)\}} E_n(z_o) dz_o \quad (18)$$

$$E_n(z_o) = j30 \left[\frac{1}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \{\cos(k_0(z_n - z_{n-1}))\psi(z_o, z_n) - \psi(z_o, z_{n-1})\} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin\{k_0(z_{n+1} - z_n)\}} \{\cos(k_0(z_{n+1} - z_n))\psi(z_o, z_n) - \psi(z_o, z_{n+1})\} \right] \quad (19)$$

$$V_m = - \int_{z_o=z_{m-1}}^{z_m} \frac{\sin\{k_0(z_o - z_{m-1})\}}{\sin\{k_0(z_m - z_{m-1})\}} E_z^i dz_o - \int_{z_o=z_m}^{z_{m+1}} \frac{\sin\{k_0(z_{m+1} - z_o)\}}{\sin\{k_0(z_{m+1} - z_m)\}} E_z^i dz_o \quad (20)$$

$$\cong \begin{cases} -V^i & (\text{基底関数 } m \text{ の頂点にギャップがあるとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

実は、式(18)の積分は正弦積分・余弦積分などの特殊関数を使えば解析的に表すことができる[1]。

しかし、プログラムのサブルーチンが特殊関数の評価をする場合にも内部では数表ではなく、数値積分をして評価することが多いので、コンピュータが発達した現在では式(18)を1変数の数値積分で評価しても十分速く計算できる。また、数値積分による評価の仕方は後で説明する「任意形状線状アンテナの解析」にも向いている。

遠方界指向性

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A}_\perp = -j\omega(\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}) \quad (21)$$

ここで、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は式(1)で与えられ、次のようになる。

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z_s=-h}^h J(z_s) \psi(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) dz_s \\ = (\hat{\mathbf{r}} \cos\theta - \hat{\theta} \sin\theta) \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z_s=-h}^h J(z_s) \psi(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) dz_s$$

これを式(21)に代入すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o) = \hat{\theta} \frac{j\mu_0\omega}{4\pi} \sin\theta \int_{z_s=-h}^h J(z_s) \psi(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) dz_s \\ = \hat{\theta} \frac{jk_0\eta_0}{4\pi} \sin\theta \int_{z_s=-h}^h J(z_s) \psi(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) dz_s$$

J を式(8)で展開すると

$$= \hat{\theta} \frac{jk_0 \eta_0}{4\pi} \sin \theta \sum_{n=1}^N a_n \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_{n+1}} j_n(z_s) \psi(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) dz_s$$

ここで、観測点に対してパラメータ (r, θ, φ) を用いて直角座標表示すると

$$\mathbf{r}_o = r(\hat{x}_o \sin \theta \cos \varphi + \hat{y}_o \sin \theta \sin \varphi + \hat{z}_o \cos \theta)$$

また、

$$\psi(z_o, z_s) = \frac{\exp\{-jk_0|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|\}}{|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} \approx \frac{\exp\{-jk_0(|\mathbf{r}_o| - \mathbf{r}_s \cdot \hat{\mathbf{r}}_o)\}}{|\mathbf{r}_o|} = \frac{\exp(-jk_0|\mathbf{r}_o|)}{|\mathbf{r}_o|} \exp\{jk_0(\mathbf{r}_s \cdot \hat{\mathbf{r}}_o)\}$$

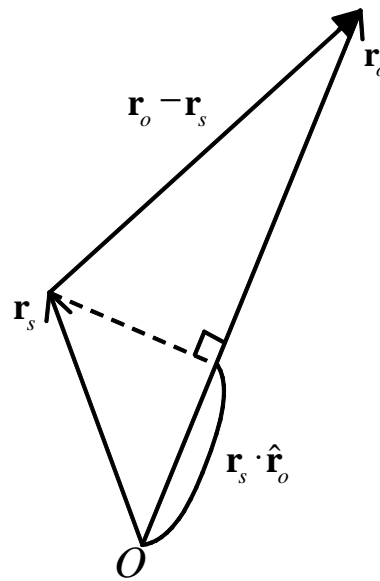


図 9 遠方近似

よって、図 9 を参照して、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}_o) &= \hat{\theta} \frac{jk_0 \eta_0}{4\pi} \frac{\exp(-jk_0|\mathbf{r}_o|)}{|\mathbf{r}_o|} \sin \theta \sum_{n=1}^N a_n \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_{n+1}} j_n(z_s) \exp(jk_0 \mathbf{r}_s \cdot \hat{\mathbf{r}}_o) dz_s \\ &= \hat{\theta} \frac{jk_0 \eta_0}{4\pi} \frac{\exp(-jk_0|\mathbf{r}_o|)}{|\mathbf{r}_o|} \sin \theta \\ &\quad \sum_{n=1}^N a_n \int_{z_s=z_{n-1}}^{z_{n+1}} j_n(z_s) \exp\{jk_0(x_s \sin \theta \cos \varphi + y_s \sin \theta \sin \varphi + z_s \cos \theta)\} dz_s \end{aligned}$$

この問題では $x_s = y_s = 0$ である。また、観測面を $\varphi = 0$ とすると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o) = \hat{\theta} \frac{jk_0 \eta_0}{4\pi} \frac{\exp(-jk_0 |\mathbf{r}_o|)}{|\mathbf{r}_o|} \sin \theta \sum_{n=1}^N a_n \int_{z_n}^{z_{n+1}} j_n(z_s) \exp(jk_0 z_s \cos \theta) dz_s \quad (22)$$

ここで、各セグメントは波長に比べて十分小さいので、微小ダイポールと見なすこともできる。 j_n のモーメントは

$$\begin{aligned} J^{mom} &= \int_{z_{n-1}}^{z_{n+1}} j_n(z) dz = 2 \int_{z_{n-1}}^{z_n} \frac{\sin\{k_0(z - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} dz = 2 \left[-\frac{1}{k_0} \frac{\cos\{k_0(z - z_{n-1})\}}{\sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} \right]_{z=z_{n-1}}^{z_n} \\ &= \frac{-2}{k_0 \sin\{k_0(z_n - z_{n-1})\}} [\cos\{k_0(z_n - z_{n-1})\} - 1] \\ &= -2 \frac{\cos(k_0 \Delta z) - 1}{k_0 \sin(k_0 \Delta z)} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{k_0 \rightarrow 0} J^{mom} &= -2 \lim_{k_0 \rightarrow 0} \frac{-\Delta z \sin(k_0 \Delta z)}{k_0 \Delta z \cos(k_0 \Delta z) + \sin(k_0 \Delta z)} \\ &= -2 \lim_{k_0 \rightarrow 0} \frac{-\Delta z^2 \cos(k_0 \Delta z)}{-k \Delta z^2 \sin(k_0 \Delta z) + 2 \Delta z \cos(k_0 \Delta z)} \\ &= \Delta z \end{aligned}$$

と三角形の面積となって予想と一致する。

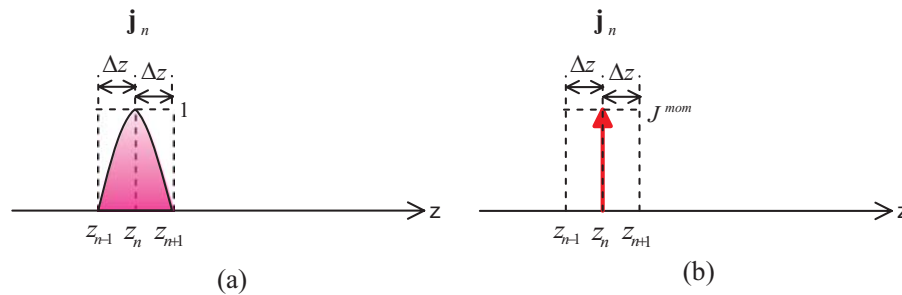


図 10 電流の基底関数の微小ダイポール近似

式(22) の j_n のモーメントは式(23)で、図 10 に示すように z_n にデルタ関数的に存在すると仮定すると、式(22)は次のように近似できる。

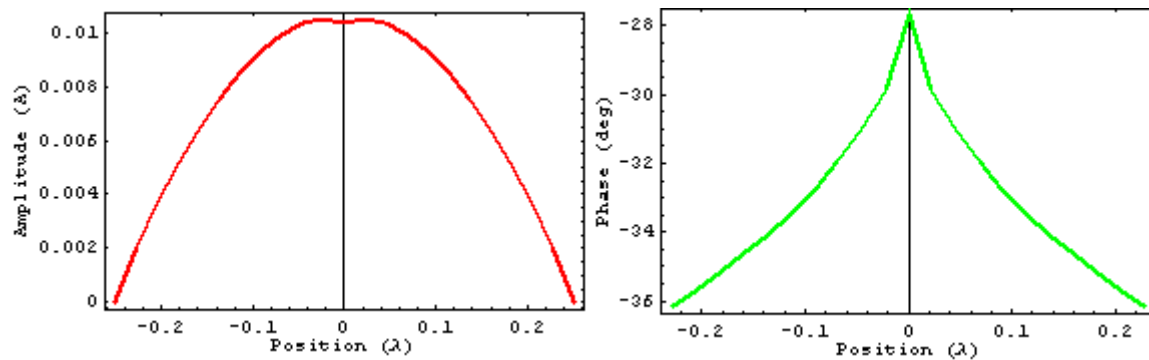
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}_o) &= \hat{\theta} \frac{jk_0 z_0}{4\pi} \frac{\exp(-jk_0 |\mathbf{r}_o|)}{|\mathbf{r}_o|} \sin \theta \sum_{n=1}^N a_n \int_{z_n}^{z_{n+1}} J^{mom} \delta(z_s - z_n) \exp(jk_0 z_s \cos \theta) dz_s \\ &= \hat{\theta} \frac{jk_0 z_0}{4\pi} \frac{\exp(-jk_0 |\mathbf{r}_o|)}{|\mathbf{r}_o|} J^{mom} \sin \theta \sum_{n=1}^N a_n \exp(jk_0 z_n \cos \theta) \end{aligned} \quad (24)$$

問題

式(17)から式(20)を使って、半波長ダイポール($h = 0.25\lambda, a = 0.001\lambda, V = 1V$)を解析するプログラムを作成し、アンテナ上の電流分布(振幅と位相)を求めてグラフを描きなさい。給電方法はデルタギャップ給電とする。また、入力インピーダンスを求めなさい。さらに、式(24)を用いて規格化した遠方界指向性を描きなさい。

解答

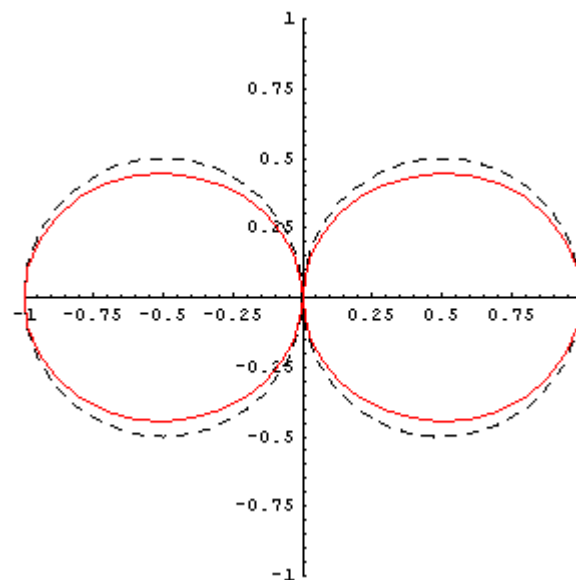
21個の基底関数で展開した例



入力インピーダンス (Ω): $82.6 + j47.4$

給電間隙は十分波長に比べて小さいとしているので、そこには一定の電流が流れていると仮定してもよい。その電流値には中心セグメントの電流のピーク値、つまり式(8)の展開係数 a_n そのものを用いればよい。

以下に指向性を示す。縦軸は z 軸で点線は微小ダイポールのものである。



より高度なモーメント法解析について

線状アンテナの簡単な場合について説明したが、3次元形状の金属導体による散乱などを解析する場合にはセグメントを三角形パッチや四角形パッチに分割し、2次元の基底関数を用いる。三角パッチを用いる方法[3]は考案者の頭文字を取ってRWG基底関数と呼ばれる。四角パッチをセグメントに用いる基底関数[4]は家の屋根の形と似ているのでルーフトップ関数(Rooftop basis function)と呼ばれる。

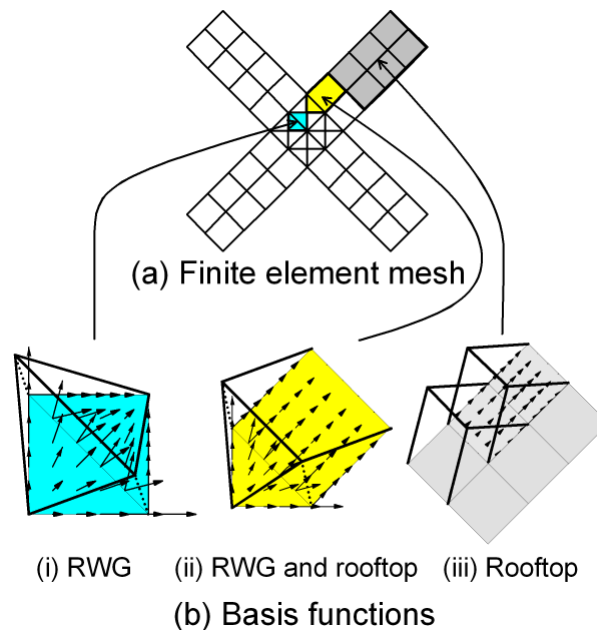


図 11 RWG 基底関数とルーフトップ基底関数

また、モーメント法で誘電体や導電性媒質を解析することもできる。区分的に一様な構造を解析する場合には境界要素法の特徴を生かして異なる媒質の境界上に未知数を配置すればよいが、電磁波の人体による散乱などを解析する場合などのように、不均質な媒質の解析は困難である。しかしその場合にも分極電流(Polarization current)を導入し、体積全体に未知数を配置すれば不均質な誘電体や導電性媒質をモーメント法で解析できる[5]。

(自由空間のグリーン関数を用いる)モーメント法解析では行列方程式の行列が密になり、またともにガウスの消去法を用いて解くと未知数の数が N の場合計算時間は $O(N^3)$ となる(メモリ使用量は $O(N^2)$)。これは大規模問題の解法においては実用的でない。そこで、基底関数をいくつかのグループに分けて同じグループ内の基底関数の同士のリアクションはまたともに計算し、違うグループにある基底関数のリアクションは Gegenbauer の多項式を用いて近似的に評価し、さらに高速フーリエ変換の計算と同様に他の部分で再利用できる途中計算は徹底的に再利用し(行列ベクトル積) 行列方程式の数値解法としてガウスの消去法ではなく、共役勾配法(CG法)を用いる方法[6]がある。これは高速多重極展開法(FMM: Fast Multipole Method)と呼ばれる手法であり、1978年に Greengard と Rokhlin によって粒子シミュレーション用に開発されたアルゴリズム[7]

でメモリ使用量・計算時間ともに $O(N^{3/2})$ となる。このアルゴリズムはすぐに境界要素法の散乱問題にも適用された[8]。また、FMM を多段に用いてさらに高速化する Multilevel-FMM という方法があり、メモリ使用量・計算時間ともに $O(N \log N)$ となる。

[参考文献]

- [1] W. L. Stutzman, G. A. Thiele, "ANTENNA THEORY AND DESIGN", John Wiley & Sons, New York
- [2] N. Inagaki, "An Improved Circuit Theory of Multielement Antenna", IEEE Trans. Antennas Propag., Vol. AP-17, No. 2, pp.120-124, March 1969.
- [3] S.M. Rao, D.R. Wilton, and A.W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," IEEE Trans. Antennas & Propagat., vol.30, pp.409-418, May 1982.
- [4] A.W. Glisson, "On the development of numerical techniques for treating arbitrarily-shaped surfaces," Ph.D. dissertation, Univ. Mississippi, 1978.
- [5] D.E. Liversay, and K-M. Chen, "Electromagnetic fields induced inside arbitrarily shaped biological bodies," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol.MTT-22, no. 12, pp.1273-1280, Dec 1974.
- [6] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multiple method for the wave equation: a pedestrian prescription", IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol.35, no.3, pp.7-12, June 1993.
- [7] L. Greengard, and V. Rokhlin, "A fast algorithm for particle simulations," Journal of Computational Physics 73 (1987), 325-348.
- [8] V. Rokhlin, "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions," J. Comp. Phys., vol.86, no.2, pp.414-439, Feb. 1990.

ブラケット記法とリアクションの概念の導入

この問題では数式処理が煩雑となって全体の見通しが悪かった。しかし基本的にやっていることは簡単である。全電流から放射される電界の導体棒接線成分を基底関数で重み付けして連立一次方程式を作っているだけである。実際の式が煩雑になるのは仕方ないことだが、全体の見通しを良くするためにここではブラケット記法とリアクションという概念を導入する。ここではより一般的に導体棒の形状は直線状でなく、任意形状であるとして議論する。

まず、導体棒に流れる未知電流を $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ とおく。また、単位電流から放射される電界を求める演算子を $\overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s)$ とおく。 $\overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s)$ はダイアディックグリーン関数(Dyadic Green's function)を言う。「ダイアディック」ベクトルとの内積を取ったらベクトルになる演算子であることを意味し、しばしば行列で表される。具体的には $\overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s)$ は式(4)のような演算を行うことを意味する。

すると放射される電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)$ は次のように表現される。

放射電界

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o) = \int_{\text{wire}} \overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s$$

積分方程式

観測点 \mathbf{r}_o を導体棒表面に持っていくと、導体表面で電界の接線成分は 0 なので、導体棒の接平面ベクトルを $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_o)$ 、入射電界を \mathbf{E}^i として次の方程式が成立する。

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_o) \cdot \{\mathbf{E}(\mathbf{r}_o) + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o)\} = 0 \quad (\mathbf{r}_o \text{ is on the wire})$$

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_o) \cdot \int_{\text{wire}} \overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s = -\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o) \quad (\mathbf{r}_o \text{ is on the wire})$$

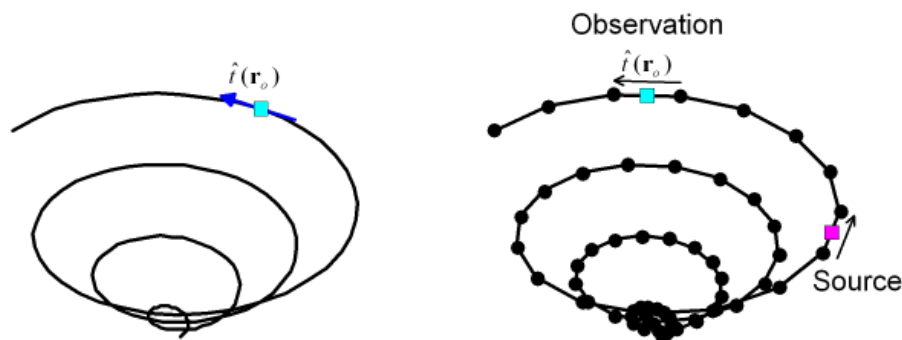


図 12 任意形状線状アンテナ

基底関数で展開

ここで、未知電流を次のように展開する

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{J}_n(\mathbf{r})$$

\mathbf{J}_i は基底関数である。これを積分方程式に代入すると

$$\hat{t}(\mathbf{r}_o) \cdot \sum_{n=1}^N a_n \int_{\text{wire}} \overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s = -\hat{t}(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o)$$

重み付け (モーメント法)

次に、この方程式に対してモーメント法 (特にガラーキン法) を適用する (重み付けを行う)。基底関数の導体棒接線成分で重み付けを行えばよいので、次のようになる。

$$\int_{\text{wire}} \left\{ \hat{t}(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \right\} \left[\hat{t}(\mathbf{r}_o) \cdot \sum_{n=1}^N a_n \int_{\text{wire}} \overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s \right] d\mathbf{r}_o \\ = - \int_{\text{wire}} \left\{ \hat{t}(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \right\} \left[\hat{t}(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o) \right] d\mathbf{r}_o$$

ところで、 $\mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o)$ は $\hat{t}(\mathbf{r}_o)$ 成分しか持っていないので $\mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) = \hat{t} J_{mt}(\mathbf{r}_o) = \hat{t} \{ \hat{t} \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \}$ 次のように表現しても構わない。

$$\int_{\text{wire}} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \cdot \left[\sum_{n=1}^N a_n \int_{\text{wire}} \overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s \right] d\mathbf{r}_o = - \int_{\text{wire}} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o) d\mathbf{r}_o$$

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_{\text{wire}} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \cdot \int_{\text{wire}} \overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_o = - \int_{\text{wire}} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o) d\mathbf{r}_o$$

N 個の基底関数で重み付けして ($m=1, \dots, N$) 次の連立一次方程式を得る。

$$[Z_{mn}] [a_n] = [V_m] \quad (25)$$

ここで、

$$Z_{mn} = \int_{\text{wire}} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \cdot \int_{\text{wire}} \overline{\mathbf{G}}_{ee}(\mathbf{r}_o; \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{J}_n(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_o \quad (26)$$

$$V_m = - \int_{\text{wire}} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o) d\mathbf{r}_o \quad (27)$$

$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}_o) : \mathbf{J}_n(\mathbf{r}_s)$ から放射される電界

式(26)は \mathbf{J}_n から放射された電界の導体棒接線成分を \mathbf{J}_m で重み付けするという意味を持ち、解析力学で提案されたより一般のリアクション (相互作用) という概念を使って「 \mathbf{J}_n と \mathbf{J}_m のリアクション」、「電流基底関数同士のリアクション」などと言ったりする。また、 Z_{mn} ($m \neq n$) を相互リアクション、 Z_{mm} を自己リアクションと言う。

また、式(27)の $\int_{\text{wire}} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o) d\mathbf{r}_o$ は入射電界を \mathbf{J}_m で重み付けするという意味を持ち「 \mathbf{E}^i と \mathbf{J}_m のリアクション」と言う。

式(26), 式(27)を量子力学の**ブラケット記法**を用いてそれぞれ次のように書くこともある。

$$Z_{mn} = \langle \mathbf{J}_m | \overline{\mathbf{G}}_{ee} | \mathbf{J}_n \rangle$$

$$V_m = -\langle \mathbf{J}_m | \mathbf{E}^i \rangle$$

このように、グリーン関数、ブラケット記法という少し抽象的な概念を導入すると式の細かな導出を隠すことになり、全体の物理的意味を把握しやすくなる。

図 13 に示すような導波管スロットアンテナのモーメント法解析ではグリーン関数が非常に複雑であり、ブラケット記法を使うと非常にわかりやすくなる。

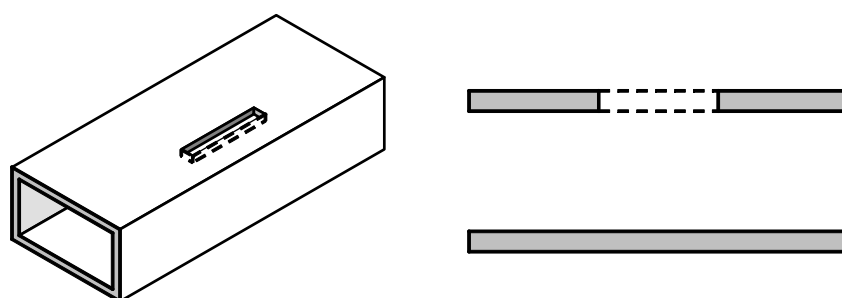


図 13 導波管スロットアンテナ

A. 付録

A.1 導体棒に流れる線電流と面電流

A.1.1 近傍界の考察

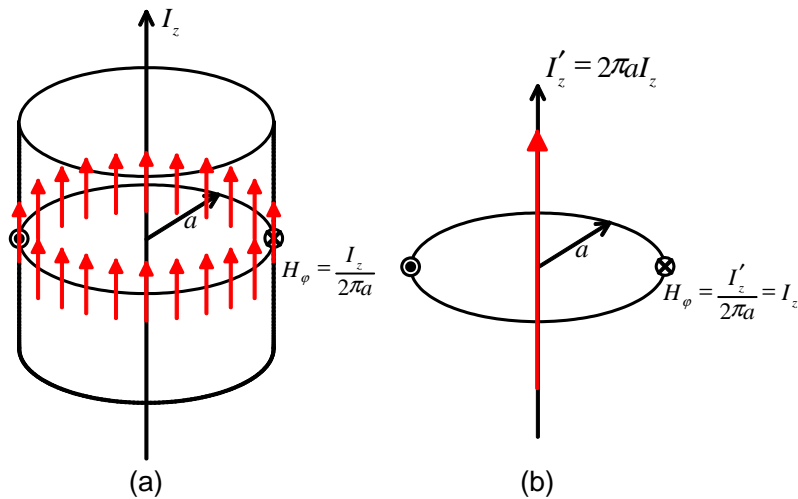


図 14 導体棒に流れる面電流と線電流による磁界

導体棒の半径が波長に対してものすごく小さいとき、導体棒表面に流れる電流による導体棒表面の電磁界を計算する際には距離がものすごく近いので静電界、静磁界と近似して計算することができる。また、電流の近傍で観測しているため、観測点近傍の電流だけが大きな寄与となるために、電流も無限に長く流れていると仮定し、図 14 のようなモデルを考える。(a)のモデルは導体棒表面に相当する部分に周囲方向に変化が無く、一様な面電流 I_z (A/m) が流れているモデルであり、(b)のモデルは導体棒の中心に相当する部分に線電流 I'_z (A) が流れているモデルである。

モデル(a)の面電流が作る磁界

静磁界のアンペアの法則

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

より、

$$L.H.S. = \int_0^{2\pi} H_\phi a d\phi = H_\phi a \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi a H_\phi$$

$$\begin{aligned}
 R.H.S. &= \int_{\rho=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \hat{z} I_z \delta(\rho-a) \cdot (\hat{z} \rho d\rho d\varphi) = \int_{\rho=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} I_z \delta(\rho-a) \rho d\rho d\varphi \\
 &= I_z \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \delta(\rho-a) \rho d\rho d\varphi = I_z \int_{\varphi=0}^{2\pi} a d\varphi = 2\pi a I_z
 \end{aligned}$$

$$H_\varphi = I_z$$

モデル(b)の線電流が作る磁界

静磁界のアンペアの法則

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

より、

$$L.H.S. = \int_0^{2\pi} H_\varphi a d\varphi = H_\varphi a \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi a H_\varphi$$

$$R.H.S. = \iint_S \hat{z} I_z \delta(x) \delta(y) \cdot (\hat{z} dx dy) = I_z \iint_S \delta(x) \delta(y) dx dy = I_z'$$

$$H_\varphi = \frac{I_z'}{2\pi a} = I_z$$

このように、 $I_z' = 2\pi a I_z$ とすると図 14 (a), (b) の 2 つのモデルが半径 a の位置に作る磁界は全く同じになる。この場合は準定常電磁界 ($|\mathbf{J}| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right|$) と見なせる。電磁界のときに導体表面には $2\hat{n} \times \mathbf{H}^{inc}$ ($\hat{n} \times \mathbf{H}^{total}$) の表面電流が流れることを考えると、この場合は $\hat{n} \times \mathbf{H}^{total} = \hat{\rho} \times (\hat{\phi} H_\varphi) = \hat{z} H_\varphi = I_z$ という電流が流れていると計算でき、つじつまが合っている。

さらに電磁界はゆっくりではあるが変化しているので、電界と磁界の比はマクスウェルの方程式で支配されている。このように静磁界を計算しただけであるが、準定常電磁界の近似になっていることを考えて電界の計算もできる。結局図 14 (a), (b) のモデルで電界を計算した結果は a が波長に比べて十分小さいときは一致すると言える。

A.1.2 遠方界の考察

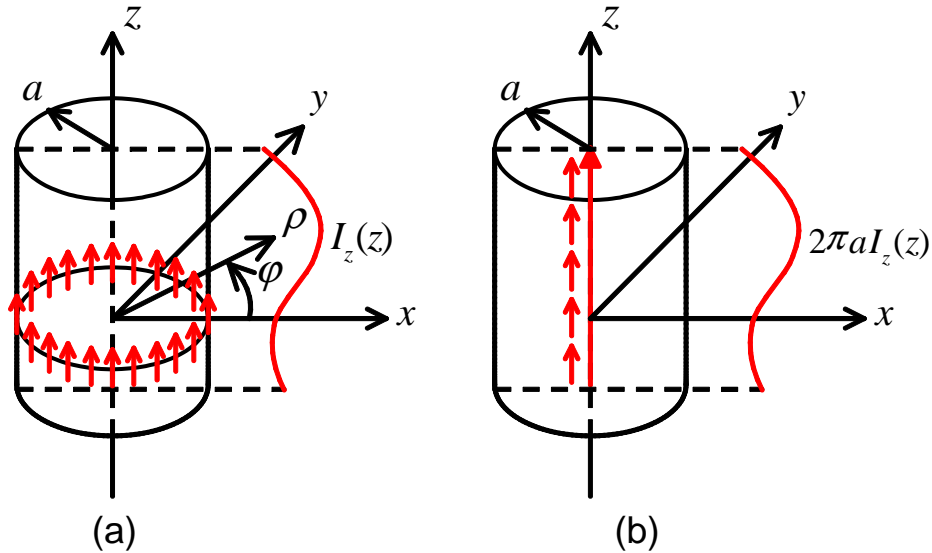


図 15 導体棒に流れる線電流と面電流

空間内に分布した電流 \mathbf{J} (体積密度) から放射される電磁界は、

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{j\omega\mu\epsilon}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} e^{-jk_0 r}}{r} dV \quad (\text{ベクトルポテンシャル})$$

で表されるので、ベクトルポテンシャルを調べる。

図 15 の問題に特化したベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} e^{-jk_0 r}}{r} dV' \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'} \left[\iint_S \frac{J_z(z) e^{-jk_0 r}}{r} dS' \right] dz' \end{aligned}$$

(i) モデル(a)について

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'} \left[\int_{\rho'} \int_{\phi'} \{I_z(z') \delta(\rho' - a)\} \frac{\exp\left(-jk_0 \sqrt{(x - \rho' \cos \phi')^2 + (y - \rho' \sin \phi')^2 + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{(x - \rho' \cos \phi')^2 + (y - \rho' \sin \phi')^2 + (z - z')^2}} \rho' d\phi' d\rho' \right] dz' \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'} \int_{\phi'} \{I_z(z')\} \frac{\exp\left(-jk_0 \sqrt{(x - a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{(x - a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + (z - z')^2}} a d\phi' dz' \end{aligned}$$

観測座標で $\rho \gg a$ のとき

$$\begin{aligned} &\equiv \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'} \int_{\phi'} \{a I_z(z')\} \frac{\exp\left(-jk_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} d\phi' dz' \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'} \{2\pi a I_z(z')\} \frac{\exp\left(-jk_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} dz' \end{aligned}$$

(ii) モデル(b)について

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'} \left[\int_{x'} \int_{y'} \{2\pi a I_z(z') \delta(x') \delta(y')\} \frac{\exp\left(-jk_0 \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx' dy' \right] dz' \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'} \{2\pi a I_z(z')\} \frac{\exp\left(-jk_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} dz' \end{aligned}$$

図 14 のモデル(a)の面電流とモデル(b)の面電流から放射される遠方界は同じである。