

電磁波の平面波スペクトル分解による観測面の変換

2003/01/17 平野拓一（東京工業大学）

Key words: 近傍界測定、開口分布

1. 平面波

まず、電磁波の歴史から説明する。マクスウェル(James Clerk Maxwell, 1831 ~ 1879, イギリス)は静磁界のアンペアの法則に変位電流の概念を導入して 1864 年に電磁波の基礎方程式として知られるマクスウェルの方程式を導出した[1]。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday's Law}) \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{Ampere's Law}) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{Gauss' Law}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Gauss' Law for Magnetic Charges}) \end{array} \right.$$

マクスウェルはこの方程式を簡単に解ける条件の下で解き、平面波という空間を伝わる電磁波があること数式の上で導出した。



図 1 J.C. Maxwell

そして、1887 年にヘルツ(Heinrich Hertz, 1857-1894, ドイツ)は実験で電磁波の存在を証明した。



図 2 H. Hertz

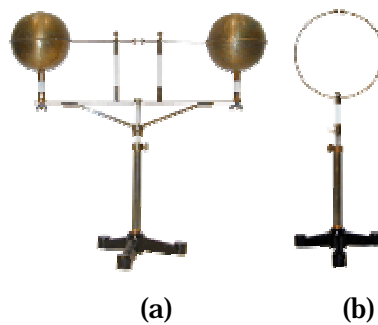


図 3 ヘルツの実験装置 (a)アンテナ (b)共振器

その実験装置は図 3 のようなもので、空間に火花放電を起こさせるものだった（マクスウェルの方程式を見ると、電流が空間中に流れるというように読み取れるため、空間に電流を流すようにすることを考えたのだと思う。実際には空間でなくても、金属の上に電流を流しても電磁波が放射されることが後からわかったのだが）。ヘルツは実験家であるだけでなく、理論家でもあり、1889年に現在「微小ダイポール(infinitesimal dipole)」として知られる電磁界をマクスウェルの方程式から導出し[2]、平面波以外の波源があるときのマクスウェルの方程式の界を得た。したがって、微小ダイポールはヘルツダイポールと呼ばれることもある。

この章の残りの部分では平面波の性質について復習する。

1.1 非自明解を持つ条件(\mathbf{k} の大きさ)

電界または磁界はそれぞれ独立に次のヘルムホルツの方程式を満たす。

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0 \quad (\text{in free space}) \quad (1)$$

ここで、

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad [V/m] \quad (2)$$

と仮定して式(1)に代入して、界となる条件を求めてみる。ここで、 \mathbf{A} は場所の関数ではない定数ベクトル、 $\mathbf{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z$ (波数ベクトル)、 $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$ (位置ベクトル)である。上の式が非自明な解($\mathbf{E} \neq 0$)になるためには次の条件を満たさなければならない(代入して簡単に確かめられる)。

$$|\mathbf{k}| = k_0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2$$

$$\begin{aligned}
 k_z &= \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \\
 &= \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} & (k_0^2 > k_x^2 + k_y^2, \text{ visible region}) \\ -j\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} & (k_0^2 < k_x^2 + k_y^2, \text{ invisible region}) \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$k_0^2 < k_x^2 + k_y^2$ のときに $-j$ とする理由は物理的意味を考え、 $+z$ 方向で増加せずに減衰するようにするためである（波源が $-z$ 方向にあると仮定した場合）。また、極座標の角度を用いて平面波の波数ベクトルを表すと次のようになる。

$$\begin{cases} k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi \\ k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi \\ k_z = k_0 \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \cos^{-1} \frac{k_z}{k_0} = \text{ArcCos}\left[\frac{k_z}{k_0}\right] \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{k_y}{k_x} = \text{ArcTan}[k_x, k_y] \end{cases} \quad (\text{ArcCos, ArcTan は Mathematica の記法})$$

このようにして、式(1)の解を式(2)のように大胆に仮定し、 $|\mathbf{k}| = k_0$ ならば式(1)の解になるという結果を得た訳である。その他にも解は無いのだろうか？これは微分方程式論から、解の一意性が保障されており、1つでも解が見つければ他の解はあり得ないので、導き方に納得できないかもしれないが、式(2)+ 条件 $|\mathbf{k}| = k_0$ は確かに式(1)の唯一の解であることが保障されている。

1.2 横波条件(\mathbf{k})

自由空間（波源、電荷なし）を考えているので、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ より

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$$

を満たさなければならない。電界は進行方向成分を持たない。電界は横波である。

1.3 磁界

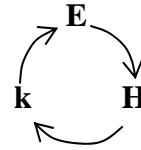
アンペアの法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$$

から平面波の磁界を計算すると、

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \quad [A/m] \quad (\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad [\Omega])$$

となる。



1.1, 1.2, 1.3 より $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ は互いに直交している。電界も磁界も進行成分を持たない。よって電磁波は横波である。

2. 平面波スペクトル表現

平面波 $\exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ (ここで、 $\mathbf{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z$, $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$) はヘルムホルツの方程式

の解であるから、そのいろいろな方向に伝播する平面波の重ね合わせもまた解である。

また、完備性(Complete)から、いろいろな方向に伝播する平面波の重ね合わせで任意の電磁界分布を表現できる。これはある関数をテイラー展開したりフーリエ変換したりして、冪関数や三角関数の和で表現できるのと同じである。ここでは、任意の電磁界分布を平面波の和に分解して電磁界を解析する話をする。

平面波 $\exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ を重ね合わせた一般の表現は次のようになる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{k}) \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dk_x dk_y \quad (4)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{k})$ は平面波 $\exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ の重み係数であり、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を平面波 $\exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ でスペクトル分解する。

k_z で重ね合わせをしない理由は、 k_z は式(3)から k_x, k_y に従属だから k_x, k_y によって決まり、独立に積分できないからである。

また、自由空間を考えているので、1.2 節の横波条件より $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ は次の関係を満たす。

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0$$

$$k_x A_x(\mathbf{k}) + k_y A_y(\mathbf{k}) + k_z A_z(\mathbf{k}) = 0$$

A_z は A_x, A_y と独立でないと考え、 A_x, A_y のみ考えればよい。

$z = d$ で電界を測定したとすると

$$\mathbf{E}(x, y, d) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathbf{A}(k_x, k_y) \exp(-jk_z d) \right\} \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y \quad (5)$$

$\mathbf{E}(x, y, d)$ は $\mathbf{A}(k_x, k_y) \exp(-jk_z z)$ の2次元フーリエ変換と考えることができる(偶然にも都合良

くそうなっている。または、フーリエ変換しようとしたら $\exp(-jk_x x - jk_y y)$ が平面波という解釈

だったと考えても良い) から、未知重み係数 $\mathbf{A}(k_x, k_y)$ は式(5)を逆フーリエ変換すると求まる。

$$\mathbf{A}(k_x, k_y) \exp(-jk_z d) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, d) \exp(jk_x x + jk_y y) dx dy$$

$$\mathbf{A}(k_x, k_y) = \frac{\exp(jk_z d)}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, d) \exp(jk_x x + jk_y y) dx dy$$

このようにして、一度近傍界測定データ $\mathbf{E}(x, y, d)$ から $\mathbf{A}(k_x, k_y)$ が求まれば、式(4)で任意の場所 (x, y, z) の電界が計算可能である。

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathbf{A}(k_x, k_y) \exp(-jk_z z) \right\} \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y \quad (6)$$

特に、 $z = 0$ で観測するときは

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(k_x, k_y) \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y$$

また、磁界は

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\eta_0} \hat{k} \times \mathbf{A}(k_x, k_y) \exp(-jk_z z) \right\} \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y$$

で表される。

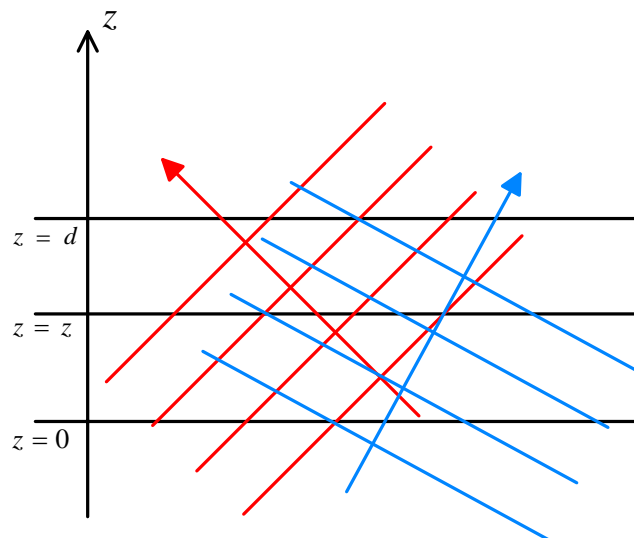


図 4 平面波スペクトル分解のイメージ

図 4 に平面波スペクトル分解のイメージを示す。このように分解すれば波が $+z$ または $-z$ 方向からしか来ないと分かっている場合、ある観測面 $z = d$ で観測した分布から他の面の分布を予想することができるのがわかるだろう。また、 $\pm z$ の両方から波が来ている場合は指向性のあるプ

ローブを用いてもう片方の波を除去して片方から来る波の特性だけを測定することが可能である。

遠方界は停留位相法[3](p. 922-926)を用いて次のように表すことができる[3](p. 625-629)。

$$\mathbf{E}^{\text{far}}(\mathbf{r}) = jk_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (7)$$

このように、任意の2次元分布をしている電界を平面波の和で表すというフーリエ変換の考え方は電磁界の問題に限らず、現在いろいろな分野で使われている（むしろ電磁界で使われているということの方があまり知られていない応用である）。例えば、最近デジタルカメラ（デジカメ）が普及したが画像を保存するとき、BMP(Bitmap)形式で保存すると自然画は非常に多くの色を含むのでファイルサイズが膨大となってしまう。そこで、自然画の保存に適した JPEG(Joint Photographic Experts Group)という画像フォーマットがよく使われている。JPEG では画像の色を値と見なして2次元フーリエ変換の問題に帰着させる。さらに画像は周期的に縦横に無限に並んでいると仮定し、フーリエ級数の問題に直す。フーリエ級数はスペクトルが離散になるため、コンピュータで扱いやすい。また、自然画はあまり急峻な変化をしないという性質があるので、高次のフーリエ係数は小さな値となり、それらをカットして画像を復元しても人間には変化がわかりにくい。JPEG こうしてフーリエ係数を保存して画像を圧縮しているのである。この原理がわかれば、高次の係数は消されてしまっているので、完全に元の画像は復元できない。したがって、非可逆圧縮である。

3. 離散フーリエ変換

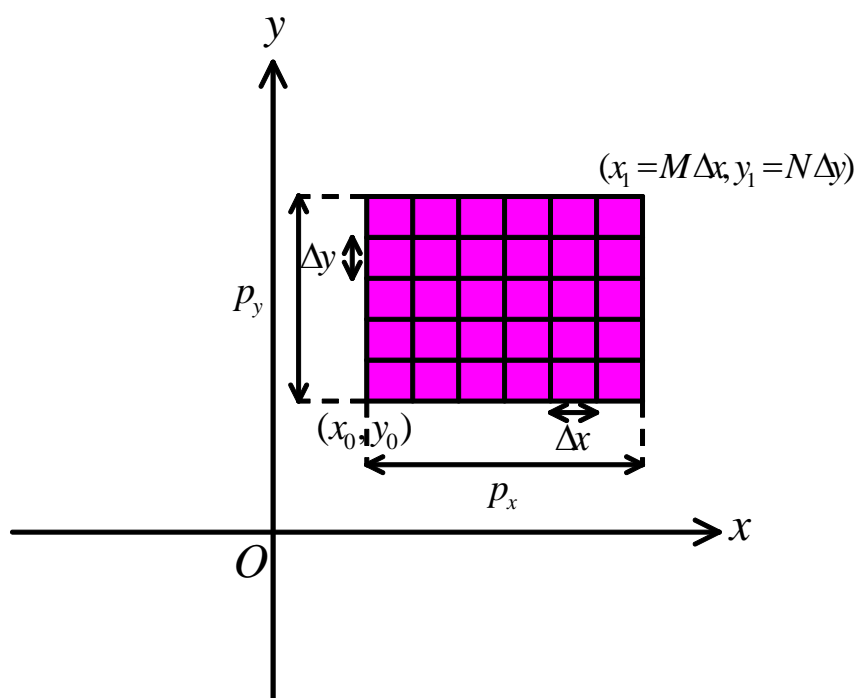


図 5 電界のサンプリング

図 5 のように電界を離散点

$$\begin{cases} x = x_0 + m\Delta x & (m = 0, \dots, M-1) \\ y = y_0 + n\Delta y & (n = 0, \dots, N-1) \end{cases}$$

で観測 (サンプリング) し (四角の中心で行うとする)

$$\mathbf{E}(x, y, d) \cong \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}(x, y, d) \delta(x - x_0 - m\Delta x) \delta(y - y_0 - n\Delta y)$$

と近似すると、式(5)に代入して

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(k_x, k_y) &= \frac{\exp(jk_z d)}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, d) \exp(jk_x x + jk_y y) dx dy \\ &\cong \frac{\exp(jk_z d)}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}(x, y, d) \delta(x - x_0 - m\Delta x) \delta(y - y_0 - n\Delta y) \\ &\quad \exp(jk_x x + jk_y y) dx dy \\ &= \frac{\exp(jk_z d)}{(2\pi)^2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}(x_0 + m\Delta x, y_0 + n\Delta y, d) \exp(jk_x (x_0 + m\Delta x) + jk_y (y_0 + n\Delta y)) \end{aligned}$$

$\mathbf{E}(x, y, d)$ は (離散点で観測されてはいるが) 周期関数ではないので、上の $\mathbf{A}(k_x, k_y)$ の k_x, k_y に関して連続であり、連続スペクトルとなる。しかし、コンピュータで処理を行う際には連続量は扱えない。そこで、図 6 のようにサンプリングしたデータが無限に周期的に配置されていると仮定して波数ベクトルの離散化を行う。

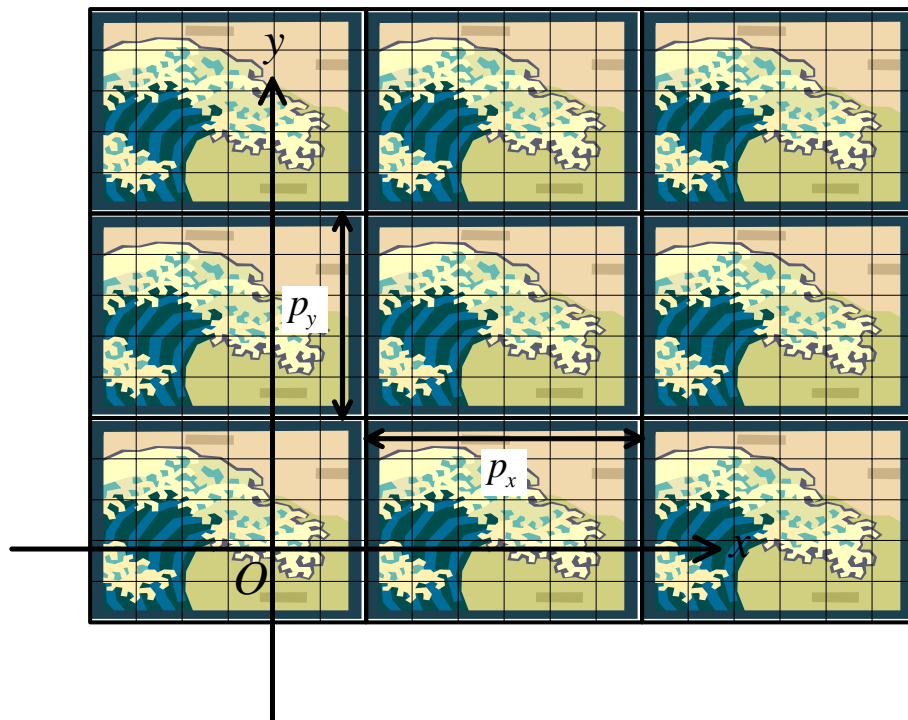


図 6 周期性を仮定したスペクトルの離散化

$$\begin{cases} k_x = m\Delta k_x = m \frac{2\pi}{p_x} \\ k_y = n\Delta k_y = n \frac{2\pi}{p_y} \end{cases} \quad (8)$$

で表し、式(6)を用いて今と同様に離散化して計算すると、任意の位置の電磁界がわかる。 $m, n = -\infty, \dots, \infty$ とすると図 6 の周期データが再現される。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathbf{A}(k_x, k_y) \exp(-jk_z z) \} \exp(-jk_x x - jk_y y) dk_x dk_y \\ &\cong \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \mathbf{A}(m\Delta k_x, n\Delta k_y) \exp(-jk_z z) \} \exp(-j(m\Delta k_x)x - j(n\Delta k_y)y) \end{aligned}$$

しかし今は離散的な操作をしたかっただけで、実際には図 5 のような非周期データを再現したいのである。そのとき、周期データのフーリエ級数（線スペクトル）は非周期データの連続スペクトルの包絡線を表しており、連続データを離散点でサンプリングしたことによる折り返し歪み（エイリアシング, aliasing）を考えて、連続スペクトルを近似する 1 周期だけを抜き出せばよいことがわかる。つまり、 $m, n = -\infty, \dots, \infty$ ではなく、 $m = 0, \dots, M-1$ 、 $n = 0, \dots, N-1$ とすればよい。

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \{ \mathbf{A}(m\Delta k_x, n\Delta k_y) \exp(-jk_z z) \} \exp(-j(m\Delta k_x)x - j(n\Delta k_y)y)$$

サンプリング定理 ($f < \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t_s}$ の再現が保障される) より、 $\frac{k_x}{2\pi} < \frac{1}{2\Delta x}$, $\frac{k_y}{2\pi} < \frac{1}{2\Delta y}$ の再現が保障される。ただし、この場合、 x - y 平面上、無限の広さに渡って x, y 方向に $\Delta x, \Delta y$ 間隔でサンプリングしなければならない。

式(3)の関係より、

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \text{ が実数、つまり}$$

$$k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 > 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 < k_0^2$$

という範囲で観測すれば放射界は全て再現できる。空間周波数は最大でも k_0 なので、

$$\frac{k_0}{2\pi} = \frac{1}{2\Delta}$$

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{2\Delta}$$

$$\Delta = \frac{\lambda_0}{2}$$

という間隔で x, y 方向にサンプリングすれば波数 k_x, k_y の計算でエイリアシングが発生することはない。

実際には無限の広さに渡ってスキャンすることができないが、スキャンしてサンプリングしても値が 0 に近くなるならばサンプリングしなくても同じことであり (後で勝手に 0 を埋めていっても測定値とほぼ同じデータが得られるから) 近傍界が大きな値を取る範囲でスキャンすればよい。

さて、図 6 のように周期性を仮定して波数 k_x, k_y を式(8)のように離散化した。式(8)を見ればわかるが、仮定した周期が小さいと波数の分解能も小さくなる (複素フーリエ級数からフーリエ変換の式を導くときを思い出して欲しい。周期を大きくすると線スペクトルの間隔が詰まってきて連続スペクトルに近づいていく)。

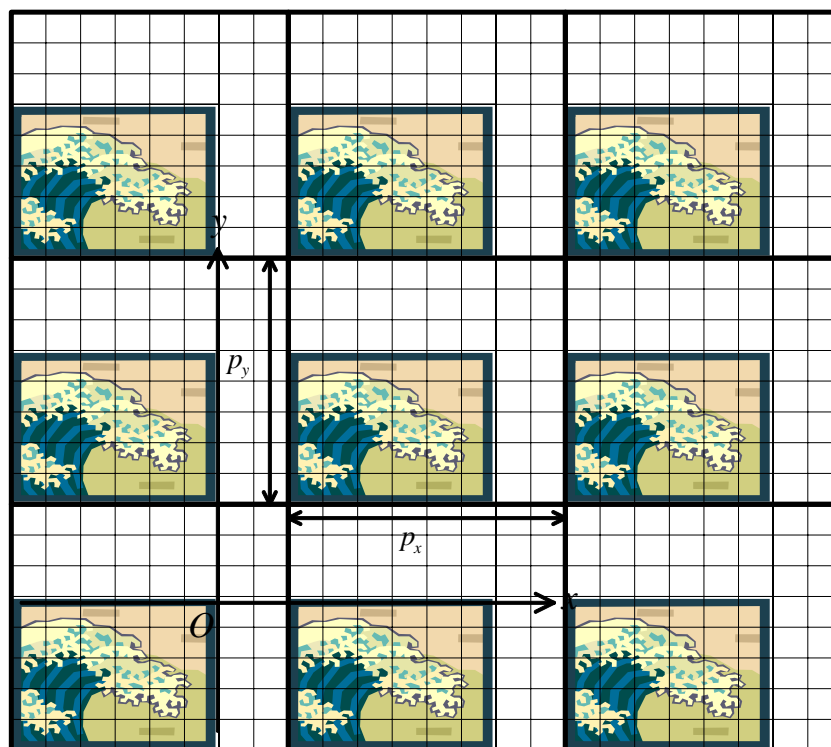


図 7 仮想データ範囲

よって、図 7 のようにデータスキャン範囲をより広く取ったと仮定し、広げた部分には 0 を代入すれば（実際に近傍界が減衰するまでスキャンしているのだから良い近似になっているはず）線スペクトル間隔が狭くなり、波数ベクトルの分解能が上がる。また、こうすると仮想データスキャン範囲を都合の良いように取れるので、データ範囲を正方形にするとプログラムが組みやすい。さらに、一辺のデータ数が 2 のべき乗(2,4,8,16,...)のときには今の離散フーリエ変換を高速に計算する高速フーリエ変換(FFT, Fast Fourier Transform)というアルゴリズムがあり、高速に計算することができて都合が良い。

4. 利得の計算

4.1 波数で積分する方法

指向性利得の計算は、[3](p. 58-60)より、

$$G(\theta, \varphi) = \frac{(4\pi r^2) \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \mathbf{E}^{\text{far}}(\theta, \varphi) \Big|_{r=r} \right|^2 \right\}}{\iint_S \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \mathbf{E}^{\text{far}}(\theta, \varphi) \Big|_{r=r} \right|^2 \right\} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi \left| \mathbf{E}^{\text{far}}(\theta, \varphi) \Big|_{r=1} \right|^2}{\iint_S \left| \mathbf{E}^{\text{far}}(\theta, \varphi) \Big|_{r=1} \right|^2 \sin \theta d\theta d\varphi} \\
&= \frac{4\pi \left| k_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \right|^2}{\iint_S \left| k_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \right|^2 \sin \theta d\theta d\varphi} \\
&= \frac{4\pi \left| k_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \right|^2}{\hat{P}_{\text{rad}}}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\hat{P}_{\text{rad}} = \iint_S \left| k_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \right|^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

この積分を角度 θ, φ でなく、波数 k_x, k_y で行う（変数変換して積分）

$$\hat{P}_{\text{rad}} = \int_{k_x} \int_{k_y} \left| k_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \right|^2 \sin \theta J dk_x dk_y$$

ここで、

$$\begin{cases} k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi \\ k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi \\ (k_z = k_0 \cos \theta) \end{cases}$$

ヤコビアン J を計算する。

$$J = \begin{vmatrix} \partial \theta / \partial k_x & \partial \theta / \partial k_y \\ \partial \varphi / \partial k_x & \partial \varphi / \partial k_y \end{vmatrix}$$

上の k_x, k_y の式の両辺をそれぞれ θ, φ で偏微分して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k_x}{\partial \theta} &= k_0 \cos \theta \cos \varphi, & \frac{\partial k_x}{\partial \varphi} &= -k_0 \sin \theta \sin \varphi \\
\frac{\partial k_y}{\partial \theta} &= k_0 \cos \theta \sin \varphi, & \frac{\partial k_y}{\partial \varphi} &= k_0 \sin \theta \cos \varphi
\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 1/(k_0 \cos \theta \cos \varphi) & 1/(k_0 \cos \theta \sin \varphi) \\ 1/(-k_0 \sin \theta \sin \varphi) & 1/(k_0 \sin \theta \cos \varphi) \end{vmatrix}$$

$$= 1/(k_0^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + k_0^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi)$$

$$= 1/(k_0^2 \cos \theta \sin \theta)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{k_x} \int_{k_y} \left| k_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \right|^2 \sin \theta \frac{1}{k_0^2 \cos \theta \sin \theta} dk_x dk_y \\
&= \frac{1}{k_0} \int_{k_x} \int_{k_y} \left| k_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \right|^2 \frac{1}{k_0 \cos \theta} dk_x dk_y \\
&= \frac{1}{k_0} \int_{k_x} \int_{k_y} \left| k_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \right|^2 \frac{1}{k_z} dk_x dk_y \\
&= \frac{1}{k_0} \Delta k_x \Delta k_y \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left| k_z \mathbf{A}(k_x, k_y) \right|^2 \frac{1}{k_z}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{cases} k_x = m \Delta k_x = m \frac{2\pi}{p_x} \\ k_y = n \Delta k_y = n \frac{2\pi}{p_y} \end{cases}$$

ただし、この方法では急峻に変化する指向性を積分しているので相当細かく Δk_x , Δk_y を取らないと、正確な利得が計算できない可能性があり、心配が残る。

4.2 開口面を微小ダイポール配列で近似する方法

4.1 節の放射電力 P_{rad} の計算は問題があるかもしれない。そこで、微小ダイポールを開口面に配列して近似する方法がある。

まず、測定するサンプリング点に微小ダイポールを配置する。利得計算の際の分子の遠方界強度は重ね合わせ（アレーファクタに素子指向性をかける）で簡単に計算できる。導波管スロットアレーなどのような無限地板上の波源のときは2倍する（イメージ理論より）。

分母の放射電力はポインティングベクトルの面積分として計算する。結果として相互アドミタンスを足すことになる。

$$\begin{aligned}
G(\theta, \varphi) &= \frac{(4\pi r^2) \left\{ \left| \mathbf{E}^{far}(\theta, \varphi) \right|_{r=r} \left\| \mathbf{H}^{far}(\theta, \varphi) \right\|_{r=r} \right\}}{\iint_S \left| \mathbf{E}^{far}(\theta, \varphi) \right|_{r=r} \left\| \mathbf{H}^{far}(\theta, \varphi) \right\|_{r=r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi} \\
&= \frac{(4\pi r^2) \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \mathbf{E}^{far}(\theta, \varphi) \right|_{r=r} \right\}^2}{\iint_S \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \mathbf{E}^{far}(\theta, \varphi) \right|_{r=r} \right\}^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(4\pi r^2) \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \mathbf{E}^{\text{far}}(\theta, \varphi) \Big|_{r=r} \right|^2 \right\}}{P_{\text{rad}}}$$

$$= \frac{N}{D}$$

ここで、

$$N = (4\pi r^2) \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \mathbf{E}^{\text{far}}(\theta, \varphi) \Big|_{r=r} \right|^2 \right\}$$

$$D = P_{\text{rad}}$$

である。

以下では P_{rad} の計算法の説明をする。

上で得たアンテナ面開口分布を電界分布ととらえると、開口分布をダイポールモーメントとして微小磁気ダイポールを配置する。

$$\mathbf{M} = \mathbf{E} \times \hat{n}$$

であり、 \mathbf{E} が測定した開口電界分布である。

...

上で得たアンテナ面開口電界分布を磁界分布ととらえると（電磁界の双対性からそのようにしても構わない）、開口分布をダイポールモーメントとして微小電気ダイポールを配置する。

$$\mathbf{J} = \hat{n} \times \mathbf{H}$$

であり、 \mathbf{H} が測定した開口磁界分布である。

\mathbf{J} を開口面に配置したということは、等価定理で下側の波源はブラックボックスに隠したことになる。この開口面から上側に放射される電力を計算すれば P_{rad} を計算したことになる。

開口面から上側に放射される電力を計算するには、開口面上でポインティングベクトルの面積分を計算し、その実部を取ればよい。

まず、ポインティングベクトルを計算するには、今磁界は分かっている ($\mathbf{H} = \mathbf{J} \times \hat{n}$) からあとは電界を計算すればよい。

$$\mathbf{E} = j \frac{\eta k l l}{2\pi r} \left(\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) e^{-jkr} \cos \theta \hat{r} + j \frac{\eta k l l}{4\pi r} e^{-jkr} \left\{ 1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right\} \sin \theta \hat{\theta}$$



相互インピーダンスの計算

ポインティングベクトルの考え方では回路的な相互インピーダンスというのは意識する必要はないが、放射するエネルギーは回路的に考えて相互インピーダンスという概念を導入すると、放射エネルギーは回路網で消費される消費電力と考えることもできる。また、ポインティングベクトルで考えるときでも相互インピーダンスは素子を作る電界を表していると考えられることもでき、式が整理されて見通しがよくなるので一応導入する。

$$Z_{ij} = \frac{1}{l_i} \frac{V_{ij}}{I_j l_j}$$

単にその場所の電界強度を測定したいから受信強度を規格化する

(上の表現に対応させると)

$$= \frac{1 - \int_{\#i} \mathbf{E}_{ij} \cdot d\mathbf{l}}{l_i I_j l_j} = \frac{1 - \mathbf{E}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{a}}_i l_i}{l_i I_j l_j} = -\frac{\mathbf{E}_{ij}}{I_j l_j} \cdot \hat{\mathbf{a}}_i = -\hat{\mathbf{E}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{a}}_i$$

Z_{ij} は微小ダイポール i, j 間の相互インピーダンスである。上の表現ではダイポールモーメント

$I_j l_j$ の素子 j の微小ダイポールが素子 i の微小ダイポールの給電点(?) に作る電圧を $I_j l_j$ で割っ

た値と考えればよい。 $\hat{\mathbf{a}}_i$ は素子 i の微小ダイポールの向きである。 $\hat{\mathbf{E}}_{ij}$ はダイポールモーメント 1 の素子 j の微小ダイポールが素子 i の微小ダイポールの位置に作る電界を表す。



自己インピーダンスの計算

自己インピーダンスの計算のときだけ、相互インピーダンスの表現では特異点となるため極限を取って解析的に求める必要がある。また、レジスタンスは有限値となるが、リアクタンスは発散する[4](p.171)。しかし、放射電力の計算ではリアクタンスは結局用いないのでレジスタンスしか計算しない。

$$E_\theta = j \frac{\eta k l l}{4\pi r} e^{-jkr} \left\{ 1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right\} \sin \theta$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ とおき、 $r \rightarrow 0$ の極限から自己レジスタンスを計算する

$$\text{Re}[E_\theta|_{\theta=\pi/2}] = \text{Re} \left[j \frac{\eta k l l}{4\pi r} \{ \cos(kr) - j \sin(kr) \} \left\{ 1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left[\frac{\eta k l l}{4\pi r} \left\{ \cos(kr) - j \sin(kr) \right\} \left\{ j + \frac{1}{kr} - j \frac{1}{(kr)^2} \right\} \right] \\
&= \frac{\eta k l l}{4\pi r} \left[\frac{1}{kr} \cos(kr) + \sin(kr) - \frac{1}{(kr)^2} \sin(kr) \right] \\
&r \rightarrow 0 \\
&\cong \frac{\eta k l l}{4\pi r} \left[\frac{1}{kr} \left\{ 1 - \frac{(kr)^2}{2} \right\} + kr - \frac{1}{(kr)^2} \left\{ kr - \frac{(kr)^3}{6} \right\} \right] \\
&= \frac{\eta k l l}{4\pi r} \left[\frac{1}{kr} - \frac{kr}{2} + kr - \frac{1}{kr} + \frac{kr}{6} \right] \\
&= \frac{\eta k l l}{4\pi r} \left[-\frac{4kr}{6} \right] \\
&= -\frac{\eta k^2 l l}{6\pi}
\end{aligned}$$

$$R_{ii} = \frac{-\mathbf{E}_{ii} \cdot \hat{\mathbf{a}}_i}{I_i l_i} = \frac{\eta k^2}{6\pi}$$

放射電力の計算

素子 j の微小ダイポールが素子 i の位置に作る電界を計算するときは、

$$\begin{aligned}
E_{ij} &= -I_j l_j Z_{ij} \\
&= I_j l_j \hat{\mathbf{E}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{a}}_i
\end{aligned}$$

と計算できる。

素子 i の位置の全電界は

$$E_i = \sum_j E_{ij} = \sum_j (-I_j l_j Z_{ij})$$

素子 i の位置から放射される電力は

$$\begin{aligned}
P_i &= \operatorname{Re} \left[\iint_{S_i} (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*) \cdot d\mathbf{S} \right] = \operatorname{Re} \left[\iint_{S_i} \left\{ \sum_j (-I_j l_j Z_{ij}) (I_i l_i \delta(\mathbf{p}_i))^* \right\} dS \right] \\
&= \operatorname{Re} \left[\sum_j \left\{ -(I_i l_i)^* I_j l_j Z_{ij} \right\} \right]
\end{aligned}$$

全放射電力は

$$P_{rad} = \sum_i P_i = \text{Re} \left[\sum_i \sum_j \{ -(I_i l_i)^* I_j l_j Z_{ij} \} \right]$$

次に、分子の計算の説明をする。

$$N = (4\pi r^2) \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \mathbf{E}^{far}(\theta, \varphi) \Big|_{r=r} \right|^2 \right\}$$

の計算をすることになるが、電流が作る電界の計算をすることになる。微小ダイポールの向きが揃っている場合には素子指向性が同じであり、アレー理論を利用すれば計算が少し簡単になる。

$$\mathbf{E}^{far}(\theta, \varphi) = \frac{\exp(-jkr)}{r} \mathbf{E}(\theta, \varphi) \quad (\text{フラウンホーファー[遠方界]近似})$$

となり、

$$\mathbf{E}(\theta, \varphi) = EF(\theta, \varphi) AF(\theta, \varphi)$$

となる。EFは素子指向性(element factor)、AFはアレーファクタ(array factor)である。

EFはフラウンホーファー近似して電流から電界を求める計算をし、 $\frac{\exp(-jkr)}{r}$ を取り除いてあ

る。それが上の表現に現れている。

よって、

$$\begin{aligned} N &= (4\pi r^2) \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \mathbf{E}^{far}(\theta, \varphi) \Big|_{r=r} \right|^2 \right\} \\ &= (4\pi r^2) \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \frac{\exp(-jkr)}{r} \mathbf{E}(\theta, \varphi) \right|^2 \right\} \\ &= (4\pi r^2) \left\{ \frac{1}{\eta_0} \left| \frac{\exp(-jkr)}{r} \right|^2 \left| \mathbf{E}(\theta, \varphi) \right|^2 \right\} \\ &= (4\pi r^2) \left\{ \frac{1}{\eta_0} \frac{1}{r^2} \left| \mathbf{E}(\theta, \varphi) \right|^2 \right\} \\ &= \frac{4\pi}{\eta_0} \left| \mathbf{E}(\theta, \varphi) \right|^2 \end{aligned}$$

導波管スロットアレーのように、無限地板上の波源を扱う場合には上の値をさらに2倍する。

[参考文献]

- [1] J.C. Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field," Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.155, pp.459-512, 1865.
- [2] H. Hertz: Electric waves, p.144, Dover pub inc.
- [3] C.A. Balanis, Antenna Theory, John Wiley & Sons. Inc., 2nd ed., 1997.

[4] 稲垣直樹、電磁波工学、丸善株式会社、平成 6 年