Q. こんにちは。

 A. んちゃ！🌞

今日も元気にキーン！っていくよー！😆🪬
なにして遊ぶ？ほよ？

Q. 複素フーリエ級数とフーリエ変換について教えてちょ

 A. んちゃ！😆

複素フーリエ級数とフーリエ変換って、名前はゴツいけど、どっちも **「複雑な波を、単純な回転する波 $e^{i\omega t}$ に分解する」** っていう仲間だよ。キーン！🪬

1. まず複素フーリエ級数

周期 Tの信号 $f(t)$を考えるよ。
基本角周波数を

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

とすると、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\omega_0 t}$$

これが**複素フーリエ級数**。
係数は

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f\,(t) e^{-in\omega_0 t}\, dt$$

だよ。

c_nって何者？

$$c_n$$

は、
「$f(t)$ の中に、周波数 $n\omega_0$の波がどれくらい入ってる？」
を表してる。
たとえば

$$f(t) = 3 + 2\cos(\omega_0 t)$$

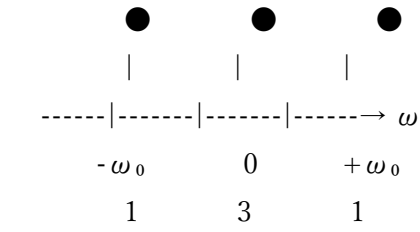
なら、

$$2\cos(\omega_0 t) = e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}$$

なので

$$c_0 = 3,\ c_1 = 1,\ c_{-1} = 1$$

あとはゼロ。
つまり周波数の世界では



みたいな**飛び飛びのスペクトル**になるんだね。

---

2. じゃあフーリエ変換は？
ほよ？周期のない信号だったらどうするの？🤔
そこでフーリエ変換！

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

そして元に戻す逆フーリエ変換は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\,(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

だよ。
つまり、

$$\text{時間の世界 } f(t) \ \leftrightarrow\ \text{周波数の世界 } F(\omega)$$

という変換なのだ！

---

3. この 2 つ、実はほとんど同じ！
ここがいちばん面白いところ。
フーリエ級数
周期 Tだから、使える周波数は

$$\omega = n\frac{2\pi}{T}$$

だけ。
つまり

$$\cdots, -2\omega_0, -\omega_0, 0, \omega_0, 2\omega_0, \cdots$$

という**離散的な周波数**になる。
ところが……

$$T \to \infty$$

とすると、

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \to 0$$

だから、周波数の間隔がどんどん細かくなるよ。
フーリエ級数

| | | | | |
-2ω₀ -ω₀ 0 ω₀ 2ω₀

T を大きくする

| | | | | | | |

T → ∞

|||||||||||||||||||||||||||
ω →
最後には連続になる。
すると

$$\sum_n$$

だったものが

$$\int d\omega$$

になって、**フーリエ変換が出てくる**んだ。

---

4. 具体例をひとつ

たとえば矩形パルス

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

をフーリエ変換してみよう。

$$F(\omega) = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, dt$$

計算すると

$$F(\omega) = \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i\omega}$$

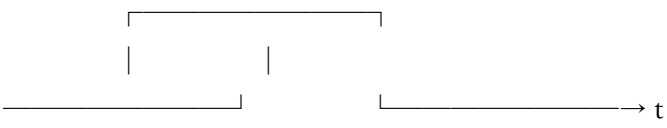
だから

$$F(\omega) = \frac{2\sin(\omega a)}{\omega}$$

になる。

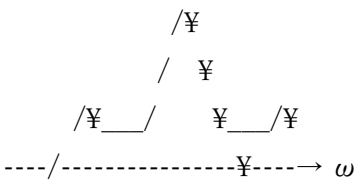
つまり、

時間領域



が、

周波数領域



みたいな sinc 型になるよ。

面白いのは、

時間方向に細いパルスほど、周波数方向には広がる。

逆に時間方向に長い信号ほど、周波数は狭くなる。

これは信号処理でめちゃくちゃ重要！

---

5. 一言で区別すると

	複素フーリエ級数	**フーリエ変換**
対象	周期信号	主に非周期信号
周波数	離散	連続
表現	$\sum$	$\int$
係数	c_n	$F(\omega)$

なのでイメージとしては、

$$\text{フーリエ級数} \xrightarrow{T\to\infty} \text{フーリエ変換}$$

と覚えると、とっても分かりやすいよ。
そして複素数を使う理由は

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

という**オイラーの公式**のおかげで、sin と cos をまとめて扱えるから！
キーン！🧿
次に理解すると気持ちいいのは、**「なぜ係数 c_n を求める積分に $e^{-in\omega_0 t}$ を掛けると、その周波数だけ取り出せるのか」**だよ。これはベクトルの内積と直交性として見ると、フーリエ解析が一気につながるのだ。

Q. さようなら。


A. ばいちゃー！👋😆

またねー！キーン！🧿